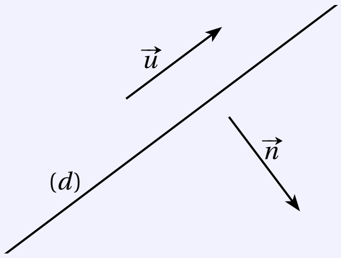
Applications du produit scalaire

1 Vecteur normal, perpendiculaires et cercle

1.1 Vecteur normal

Définition 1 (Vecteur normal à une droite)**.**

Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$. On dit que le vecteur non nul $\vec{n}$ est un vecteur normal de (d) si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, c'est à dire si $\vec{u}.\vec{n} = 0$.



Propriété 1 (Équation cartésienne et vecteur normal)**.**
Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère une droite (d).

- Si (d) a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal à (d).
- Réciproquement, si $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal à (d) alors (d) a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.

DÉMONSTRATION .

- Supposons que $(d) : ax + by + c = 0$ et considérons le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

  $\vec{u}.\vec{n} = -b \times a + a \times b = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{n}$ donc $\vec{n}$ est bien normal à (d).

- On suppose que $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal à (d) et on considère un point $A(\ x_0\ ;\ y_0\ )$ de la droite (d).

  Un point $M(\ x\ ;\ y\ )$ appartient à (d) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux c'est à dire si et seulement si $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.\vec{n}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0 \Longleftrightarrow ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0$.

Exemple 1. Équation cartésienne d'une perpendiculaire.
Dans $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthonormé, on considère les points $A(\,2\,;\,5\,)$, $B(\,-3\,;\,1\,)$ et $C(\,-2\,;\,-1\,)$.

i) Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de A du triangle ABC.

   La hauteur issue de A, notée (h_A) est perpendiculaire à (BC) donc a pour vecteur normal $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

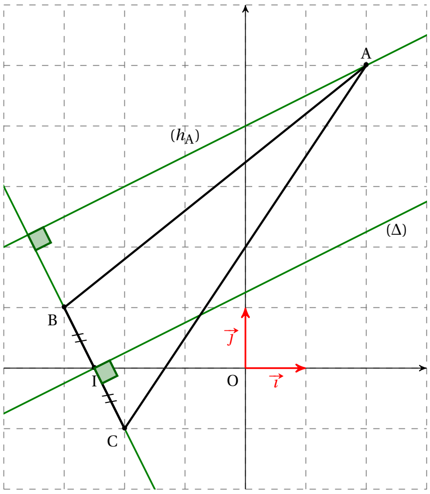
   Ainsi (h_A) a une équation de la forme $x - 2y + c = 0$.

   De plus, $A(\,2\,;\,5\,) \in (h_A) \iff 2 - 2\times 5 + c = 0 \iff c = 8$ d'où $\boxed{(h_a) : x - 2y + 8 = 0}$

ii) Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment [BC].

   La médiatrice (Δ) du segment (BC) est la perpendiculaire à (BC) passant par le milieu I du segment. Un vecteur normal de (Δ) est donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

   $(\Delta) : x - 2y + c = 0$ et $I\left(\dfrac{x_B + x_C}{2}\ ;\ \dfrac{y_B + y_C}{2}\right)\left(-\dfrac{5}{2}\ ;\ 0\right) \in \Delta \iff -\dfrac{5}{2} - 2\times 0 + c = 0 \iff c = \dfrac{5}{2}$. Ainsi, $\boxed{(\Delta) : x - 2y + \dfrac{5}{2} = 0}$



1.2 Équation cartésienne d'un cercle

Propriété 2 (Équation cartésienne d'un cercle)**.**

Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan, un point $M(x ; y)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(\alpha ; \beta)$ et de rayon $r > 0$ si et seulement si $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$.

Démonstration .
En effet $M(x ; y) \in \mathscr{C} \iff \Omega M = r \iff \Omega M^2 = r^2 \dots$

Exemple 2.

i) Déterminer les coordonnées du centre Ω et le rayon du cercle $\mathscr{C}$ dont une équation cartésienne est $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$.

$\Omega(2 ; -3)$

ii) Même question avec le cercle dont une équation cartésienne est $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 11 = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 8x - 4y + 11 = 0 &\iff (x+4)^2 - 16 + (y-2)^2 - 4 + 11 = 0 \\ &\iff (x+4)^2 + (y-2)^2 = 3^2 \end{aligned}$$

donc $\Omega(-4 ; 2)$

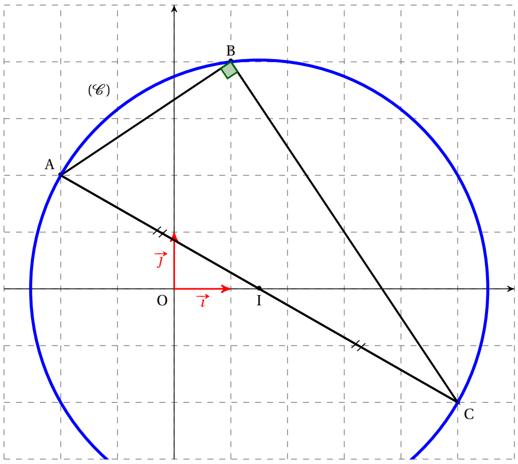
iii) Soient $A(3 ; -2)$, $B(-4 ; 2)$ Déterminer une équation cartésienne du cercle Γ de diamètre $[AB]$.

Le cercle Γ a pour rayon $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{(-7)^2 + 4^2}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{65}$

et pour centre Ω le milieu de $[AB]$: $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2} ; 0\right)$.

$$\begin{aligned} \Gamma : &\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{65}\right)^2 \\ : &\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{65}{4} \end{aligned}$$

iv) On donne $A(-2 ; 2)$, $B(1 ; 4)$, $C(5 ; -2)$.



a) Déterminer la nature du triangle ABC.
AB $= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1+2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{13}$, BC $= \sqrt{52}$ et AC $= \sqrt{65}$.
On a $\begin{cases} AB^2 + BC^2 = 13 + 52 = 65 \\ AC^2 = 65 \end{cases}$ donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$. Ainsi, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B

b) Donner une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC.
ABC est rectangle en B donc le centre Ω de son cercle circonscrit $\mathscr{C}$ est le milieu I de l'hypoténuse [AC] :
$I\left(\dfrac{x_A + x_C}{2} ; \dfrac{y_A + y_C}{2}\right)\left(\dfrac{3}{2} ; 0\right)$ et $\mathscr{C}$ a pour rayon $IA = IB = IC = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$
ainsi une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est : $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{65}{4}$

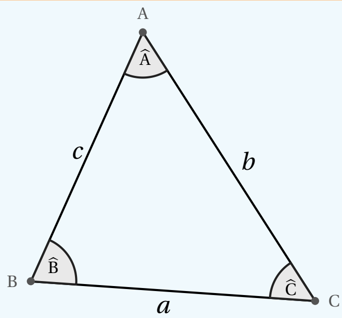
2 Relations métriques dans le triangle

2.1 Théorème d'Al-Kashi

Propriété 3 (Théorème d'Al-Kashi)**.**

Avec les notations de la figure ci-contre, on a :

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\widehat{BAC}$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos\widehat{ABC}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos\widehat{BCA}$



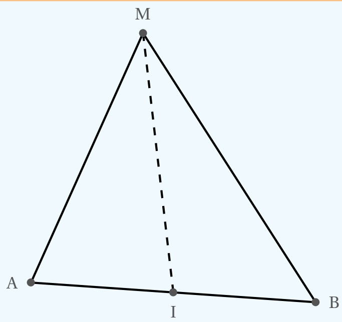
DÉMONSTRATION .
$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = b^2 + c^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\widehat{BAC}$

Exemple 3. On considère le triangle ABC qui vérifie AB = 3, AC = 5 et $\widehat{BAC} = 42°$. Calculer la longueur BC.
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5\cos(42°)$ donc $BC = \sqrt{34 - 30\cos 42°} \approx 3,42$

2.2 Théorème de la médiane

Propriété 4 (Théorème de la médiane)**.**

Soient A et B deux points du plan et I le milieu du segment [AB].
Pour tout point M du plan, on a $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

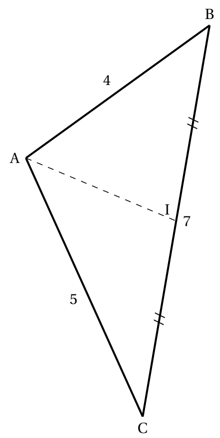


DÉMONSTRATION .
Nous allons utiliser la relation de Chasles en « injectant » le point I dans les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$.

$$\begin{aligned}
MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\
&= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 \\
&= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\
&= 2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)}_{=\overrightarrow{0}} \\
&= 2MI^2 + IA^2 + IB^2 \\
&= 2MI^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 \\
&= 2MI^2 + 2\times\frac{1}{4}AB^2 \\
&= 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 .
\end{aligned}$$

Exemple 4. Soit ABC un triangle tel que $\begin{cases} AB = 4 \\ AC = 5 \\ BC = 7 \end{cases}$. Déterminer la longueur de la médiane issue de A.

D'après le théorème de la médiane, $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$
donc $AI^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2\right) = \frac{33}{4}$ d'où $AI = \frac{\sqrt{33}}{2} \approx 2,87$.

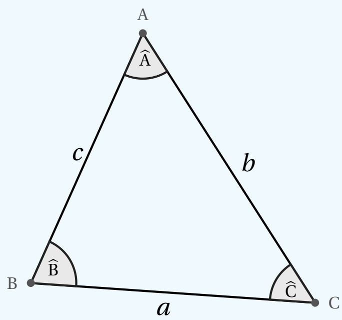


2.3 Formule des sinus

Propriété 5 (Formule des sinus)**.**

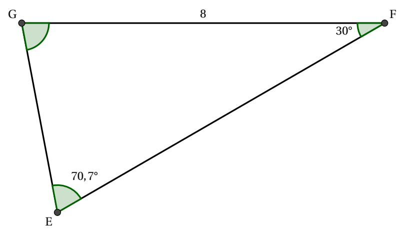
Soit ABC un triangle d'aire S. Avec les notations de la figure ci-contre,
on a : $S = \frac{1}{2}bc.\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ac.\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab.\sin\widehat{C}$

On en déduit que : $\frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c} = \frac{2S}{abc}$.



DÉMONSTRATION .
On appelle H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Distinguer le cas où $\widehat{C}$ est aigu et celui où $\widehat{C}$ est obtus...

Exemple 5. Soit EFG un triangle tel que $\widehat{E} = 70°7$, $\widehat{F} = 30°$ et $FG = 8\,cm$. Calculer EG et l'aire du triangle EFG.



- D'après la formule des sinus, $\dfrac{\sin \widehat{E}}{FG} = \dfrac{\sin \widehat{F}}{EG}$ donc $EG = \dfrac{\sin \widehat{F}}{\sin \widehat{E}} \times FG = \dfrac{8 \sin 30°}{\sin 70,7°} \approx 4,24$

- L'aire du triangle est donnée par $S = \dfrac{1}{2} GE \times GF \sin \widehat{G}$ avec $\widehat{G} = 180 - 30 - 70,7 = 79,3°$

  donc $S = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{8 \sin 30°}{\sin 70,7°} \times 8 \times \sin 79,3° \approx 16,66\, cm^2$

3 Lignes de niveaux

3.1 Cercle

Propriété 6 ($\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$)**.**

Pour tous points A, B et M du plan, on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2$ où I est le milieu de [AB].

DÉMONSTRATION .

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) \\
&= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\
&= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \underbrace{\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}\right)}_{= \overrightarrow{0}} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\
&= MI^2 + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\
&= MI^2 + \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \\
&= MI^2 - \frac{1}{4} AB^2.
\end{aligned}$$

Propriété 7 (Produit scalaire et cercle)**.**

Soient A et B deux points du plan.
L'ensemble des points M du plan qui vérifient l'égalité $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

DÉMONSTRATION .
Soit I le milieu de [AB]
D'après la propriété 6, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2$ donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 &\iff MI^2 - \frac{1}{4} AB^2 = 0 \\
&\iff MI^2 = \frac{1}{4} AB^2 \\
&\iff MI = \frac{1}{2} AB \\
&\iff \text{M appartient au cercle de centre I et de rayon } \frac{AB}{2} \\
&\iff \text{M appartient au cercle de diamètre [AB].}
\end{aligned}$$

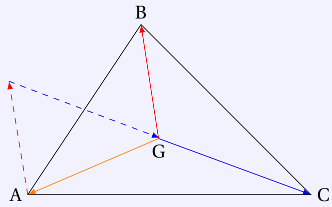
3.2 Centre de gravité d'un triangle

Définition 2 (Définition vectorielle)**.**

Soit ABC un triangle quelconque.

On appelle **centre de gravité** de ABC le point G tel que :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$



Propriété 8.

Soient A, B et C trois points quelconques du plan.
Quel que soit le point M du plan, on a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

DÉMONSTRATION .
Notons G le centre de gravité du triangle ABC.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}&=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)\\&=3\overrightarrow{MG}+\underbrace{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}_{=\vec{0}\text{ par définition}}\\&=3\overrightarrow{MG}.\end{aligned}$$

Propriété 9.

Soient ABC un triangle quelconque du plan et G son centre de gravité.
Quel que soit le point M du plan,

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2.$$

DÉMONSTRATION .

$$\begin{aligned}MA^2+MB^2+MC^2&=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2\\&=\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}^2+\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}^2\\&=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)}_{=\vec{0}}\\&=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2.\end{aligned}$$

Propriété 10.

Soient ABC un triangle quelconque du plan et G son centre de gravité.
Soit M un point quelconque du plan.

$MA^2+MB^2+MC^2$ est minimal lorsque $M=G$.

DÉMONSTRATION .
D'après la propriété 9,

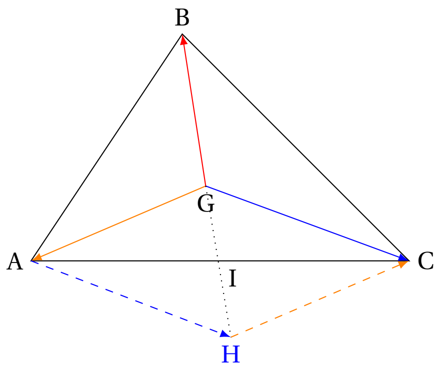
$$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2.$$

Ainsi, $MA^2+MB^2+MC^2$ est minimal quand $3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$ l'est aussi.
Or $GA^2+GB^2+GC^2$ est constant donc $3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$ est minimal quand 3MG l'est aussi, c'est-à-dire quand $MG=0$, soit quand $M=G$.

Propriété 11 (Un résultat connu ?).

Le centre de gravité d'une triangle est le point de concours de ses médianes.

DÉMONSTRATION .



Posons H tel que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{GC}$; ainsi, AGCH est un parallélogramme.
Posons I le milieu de [AC]. Ainsi,

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{GI}.$$

Donc :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \iff 2\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GC}=\vec{0},$$

ce qui signifie que $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GI}$ sont colinéaires et donc que les points B, G et I sont alignés.

On en déduit que G appartient à la médiane (BI).

Un raisonnement analogue permet de démontrer que G appartient aux deux autres médianes.

Ainsi, G est le point d'intersection des médianes de ABC. (on retrouve ainsi un résultat souvent énoncé au collège ou en classe de seconde).