التمرين 1 :

I نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ للأعداد الصحيحة الموجبة قطعا المعرفة لكل عدد صحيح طبيعي n بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

بين , باستعمال البرهان بالترجع , أنه لكل عدد صحيح طبيعي n :

أ) $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n \geq n$.

ب) $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n u_{n+2} + (-1)^{n+1} = (u_{n+1})^2$.

II لتكن $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتاليتين العدديتين المعرفتين بما يلي : $\forall n \in \mathbb{N}; \quad \alpha_n = \dfrac{u_{2n-1}}{u_{2n}} \quad ; \quad \beta_n = \dfrac{u_{2n}}{u_{2n+1}}$.

1) أ) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \beta_n - \alpha_n = \dfrac{1}{u_{2n} u_{2n+1}}$.

ب) استنتج أن: $\alpha_n < \beta_n$ و $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad 0 < \beta_n - \alpha_n < \dfrac{1}{n}$

2) أ) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \alpha_{n+1} - \alpha_n = \dfrac{1}{u_{2n} u_{2n+2}}$.

(يمكن استعمال نتيجة السؤال I - ب)

ب) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \alpha_n = \dfrac{1}{\beta_n} - 1$.

ج) استنتج تغيرات كل من المتتاليتين $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3) أ) بين أن المتتاليتين $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متحاذيتان .

ب) أحسب نهاية كل من المتتاليتين $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

التمرين 2 :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث :

$$f(x) = 2 + \frac{1}{2}\sin(x)$$

1) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0,\pi]$ بحيث : $f(\alpha) = \alpha$.

2) لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية , بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وأن : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \alpha$.

التمرين 3 :

I لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث :

$$g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}}$$

1) أ) أحسب نهايات g عند محدات مجموعة تعريفها .

ب) بين أنه : $\forall x \in \mathbb{R}: \quad g'(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{2(x^2+1)^3}}$.

ج) استنتج أن : $\forall x \in]0,1[: \quad 0 < g'(x) < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

د) أعط جدول تغيرات الدالة g .

2) لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad 0 \leq u_n < 1$.

ب) أثبت أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad 0 < |u_{n+1} - 1| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}|u_n - 1|$.

ج) استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وحدد نهايتها .

II نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي حيث :

$$f(x) = Arc\cos\big(g(x)\big)$$

1) أ) حدد D حيز تعريف الدالة f .

ب) أحسب نهايات f عند محدات D .

ج) بين أن : $\forall x \in]1,+\infty[\quad ; \quad f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

وأن : $\forall x \in]-\infty,1[\quad ; \quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}$.

2) أ) أثبت أن: $\forall x \in]1,+\infty[\quad ; \quad f(x) = Arc\tan(x) - \dfrac{\pi}{4}$

وأن : $\forall x \in]-\infty,1[\quad ; \quad f(x) = \dfrac{\pi}{4} - Arc\tan(x)$

ب) أدرس قابلية اشتقاق f في النقطة 1 .

3) أعط جدول تغيرات الدالة f .

4) أ) بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف I .

ب) أرسم (C_f) والمماس ل (C_f) في النقطة I .

التمرين 4 :

1) برهن على أن: $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad : \quad 2x - \dfrac{4}{3}x^3 \leq \sin(2x) \leq 2x$

2) نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2} \quad و \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{2n^2}\right)$$

أ) أحسب v_n بدلالة n وحدد $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

ب) برهن على أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \leq n^4$.

ج) برهن على أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad v_n - \alpha\dfrac{1}{n^2} \leq u_n \leq v_n$,

حيث α عدد حقيقي يتم تحديده . استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وحدد نهايتها .

التمرين 5 :

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{-x^2+4x+5}$$

1) أ) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على حيز تعريفها .

ب) أعط جدول تغيرات الدالة f .

ج) أنشئ (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى

معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,2]$ بما يلي :

$$g(x)=-1-x+\sqrt{-x^2+4x+5}$$

أ) أعط جدول تغيرات الدالة g .

ب) استنتج أن: $\forall x\in[0,2]:\quad 0\le f(2)-f(x)\le\frac{2}{3}(2-x)$

3) لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كالآتي :

$$\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=f(u_n)\quad,\quad n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

أ) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\quad,\quad 0<u_n<2$.

ب) أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ج) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\quad,\quad |u_n-2|<\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

د) استنتج $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

التمرين 6 :

$\boxed{A}$ لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي حيث :

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

1) أعط جدول تغيرات الدالة f وتحقق أن : $f([1,2])\subset[1,2]$.

2) ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أ) حدد أفاصيل نقط انعطاف المنحنى (C_f) .

ب) أنشئ المنحنى (C_f) .

$\boxed{B}$ لتكن g الدالة العددية لمتغير حقيقي حيث :

$$g(x)=Arc\sin(f(x))$$

1) أ) حدد مجموعة تعريف الدالة g وأحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$.

ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة g في النقطة 0 على اليسار .

ج) أعط جدول تغيرات الدالة g .

2) ليكن (C_g) المنحنى الممثل للدالة g في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أ) أثبت أن : $\forall t\in[0,1]\quad;\quad Arc\sin(t)\ge t$.

ب) استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $]-\infty,0]$

3) أنشئ , بلون مغاير , (C_g) .

(تحديد نقط الإنعطاف غير مطلوب)

$\boxed{C}$ نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث :

$$\begin{cases}u_0=2\\ u_{n+1}=f(u_n)\quad;\quad n\in\mathbb{N}\end{cases}.$$

ونضع $\boxed{w_n=u_{2n+1}}$ $\boxed{v_n=u_{2n}}$ $\forall n\in\mathbb{N}:$

1) تحقق من أن : $\forall n\in\mathbb{N}:\quad u_n\in[1,2]$.

2) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}:\quad \boxed{w_n<v_n}$.

(يمكن استعمال كون $f\circ f$ تزايدية على المجال $[1,2]$)

3) بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية وأن $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية .

4) أ) بين أن : $\forall x\in[1,+\infty[\quad;\quad |f'(x)|\le\frac{1}{4}$.

ب) بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $f\circ f$, استنتج أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad;\quad 0<v_n-w_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^2(v_{n-1}-w_{n-1})$

ج) استنتج أن المتتاليتين $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متحاذيتان .

التمرين 7 :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge1}$ بحيث :

$$\begin{cases}u_1=1\\ u_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}\quad;\quad n\ge2\end{cases}$$

1) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية للدالة $F:x\mapsto\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ على المجالات $[k,k+1]$ حيث : $k\in\{1,2,...,n\}$, أثبت أن :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad;\quad u_n-\frac{1}{n}\le\frac{2}{3}-\frac{2}{3n\sqrt{n}}\le u_n-\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

2) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة وحدد نهايتها .

التمرين 8 :

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي حيث :

$$f(x)=\begin{cases}-x+\sqrt{x^2+1}\quad;\quad x\ge0\\ \frac{4}{\pi}Arc\tan\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\quad;\quad x<0\end{cases}$$

1) أ) أدرس اتصال f في النقطة 0.

ب) أدرس قابلية اشتقاق f في النقطة 0.

2) أ) بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}^*\quad;\quad f'(x)<0$.

ب) أعط جدول تغيرات الدالة f محددا نهايتيها عند $+\infty$ و $-\infty$.

3) أنشئ (C_f) , المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة القياس : 2 cm)

4) نضع : $I=\left[\frac{1}{4},1\right]$. بين أن : $\boxed{f(I)\subset I}$.

5) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث :

$$\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=f(u_n)\quad;\quad n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

أ) بين أن : $\forall x\in I\quad;\quad |f'(x)|<\frac{4}{5}$.

ب) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية , بين أن :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad;\quad \left|u_n-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|<\frac{4}{5}\left|u_{n-1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|$$

ج) استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وأحسب نهايتها .

د) بين أن :

$$\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\quad ; \quad f\left(\frac{1}{\tan(x)}\right)=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

هـ) نضع : $\forall n\in\mathbb{N} \quad ; \quad a_n=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$.

i) تحقق أن : $a_0=1$ وأن : $\forall n\in\mathbb{N}: \quad a_{n+1}=2^{n+1}-a_n$.

ii) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}: \quad u_n=\tan\left(\frac{\pi a_n}{2^{n+2}}\right)$.

التمرين 9 :

ليكن α عددا حقيقيا أكبر قطعا من $\frac{6}{5}$. $\left(\alpha>\frac{6}{5}\right)$

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases}u_1=1\\ v_1=6\end{cases} \quad \text{و} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*: \begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{5u_n+v_n}{6}\\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+(\alpha-1)v_n}{\alpha}\end{cases}$$

1) بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad : \quad 0<u_n<v_n$.

2) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ تزايدية وأن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ تناقصية .

3) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad : \quad v_{n+1}-u_{n+1}<\frac{5}{6}(v_n-u_n)$.

استنتج أن المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متحاذيتان .

4) بين أن :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad : \quad 6\alpha u_{n+2}-(11\alpha-6)u_{n+1}+(5\alpha-6)u_n=0$$

استنتج u_n بدلالة n و α ثم أحسب v_n بدلالة n و α .

التمرين 10 :

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة بما يلي :

$f(x)=2+\frac{a}{x}$ حيث $a\in]0,+\infty[$.

1) أ) أدرس تغيرات الدالة f .

ب) بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$.

2) نعتبر المتتاليات $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $1<u_0<\alpha$ و

$$\forall n\in\mathbb{N}: \quad \boxed{u_{n+1}=f(u_n)} \quad \boxed{v_n=u_{2n}} \quad \boxed{w_n=u_{2n+1}}$$

أ) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}: \quad 0<v_n<a<w_n$.

ب) بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية قطعا وأن المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية قطعا , واستنتج أن المتتاليتين $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربتان .

ج) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}: \quad w_{n+1}-v_{n+1}<\frac{a}{2v_n+a}(w_n-v_n)$.

د) بين أنه يوجد عدد حقيقي k غير مرتبط بالعدد n بحيث $0<k<1$ و $\forall n\in\mathbb{N}: \quad w_{n+1}-v_{n+1}<k(w_n-v_n)$.

هـ) استنتج أن المتتاليتين $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متحاذيتان يحددا نهايتهما .

التمرين 11 :

لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث :

$$g(x)=Arc\sin\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)$$

1) بين أن مجموعة تعريف الدالة g هي المجال $[-1,1]$.

2) بين أن : $\forall x\in]-1,1[: \quad g'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

3) نضع : $I=[-1,1]$ و $J=g(I)$ ؛ ولتكن h الدالة العددية المعرفة من I نحو J بما يلي : $\forall x\in I: \quad h(x)=g(x)$

بين أن h تقابلا محددا J ؛ ثم أحسب $h^{-1}(x)$ لكل x من J .

4) بين أن : $\forall x\in[-1,1]: \quad g(x)=\frac{1}{2}Arc\cos(x)$.

التمرين 12 :

لتكن f_α الدالة العددية لمتغير حقيقي حيث :

$$f_\alpha(x)=x+Arc\cos\left(\frac{\alpha}{x}\right)$$

و α بارامتر حقيقي

و D_α حيز تعريف الدالة f_α

و (C_α) المنحنى الممثل للدالة f_α في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) تحقق من أن $D_0=\mathbb{R}^*$ وأن (C_0) مستقيم محروم من نقطة A ينبغي تحديدها .

ب) حدد D_α من أجل $\alpha\neq0$.

ج) بين أن: $\forall t\in[-1,1]: \quad Arc\cos(t)+Arc\cos(-t)=\pi$

وأثبت أن جميع المنحنيات (C_α) تقبل مركز تماثل مشترك مطلوب تحديده .

د) أدرس إشارة $f_\alpha(x)-f_\beta(x)$ من أجل x في $D_\alpha\cap D_\beta$ و $\alpha<\beta$ ؛ وأول مبيانيا النتيجة .

2) نفترض أن : $\boxed{\alpha\neq0}$.

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f_\alpha(x)$ ؛ وبين أن المستقيم الذي معادلته $y=x+\frac{\pi}{2}$ مقارب مشترك لجميع المنحنيات (C_α) .

ب) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to|\alpha|\\ x>|\alpha|}}\frac{f_\alpha(x)-f_\alpha(|\alpha|)}{x-|\alpha|}$, (ناقش حسب الحالتين : $\alpha>0$ و $\alpha<0$) . أول مبيانيا النتيجة .

4) نفترض أن $\boxed{\alpha>0}$.

أ) بين أن f_α تزايدية قطعا على كل مجال من مجالات D_α .

ب) ضع جدول تغيرات الدالة f_α .

4) أنشئ (C_0) و (C_1) في نفس المعلم .

5) لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases}u_0=a\\ u_{n+1}=f_\alpha(u_n) \quad ; \quad n\in\mathbb{N}\end{cases} \quad \text{و} \quad 0<\alpha<a$$

أ) مثل في المعلم السابق على محور الأفاصيل النقط التي أفاصيلها u_0 و u_1 و u_2 و u_3 من أجل : $\boxed{a=2}$ و $\boxed{\alpha=1}$.

ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية قطعا .
ج) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ غير مكبورة .
د) بين أن : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

التمرين 13:

1. لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $v_n = \sum_{k=1}^{n} k$. حدد v_n بدلالة n .
2. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ \sum_{k=1}^{n} k^2 \le n^3$.
3. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي :
$$\forall x>0:\ f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$$
بين أن : $\forall x>0: x-\frac{x^2}{2}<f(x)<x$.
4. لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $S_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$. أحسب : $\lim_{n\to\infty} S_n$.

التمرين 14 :

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين ب :
$$\begin{cases} u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+v_n) & : \quad n\in\mathbb{N} \\ v_{n+1}=\sqrt{u_{n+1}v_n} & : \quad n\in\mathbb{N} \\ u_0=1 & , \quad v_0=\sqrt{2} \end{cases}$$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}:\ 0<u_n<v_n$.
2. أدرس رتابة كل من المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. أ. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}:\ v_{n+1}-u_{n+1}<\frac{1}{2}(v_n-u_n)$.
ب. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}:\ v_n-u_n<\left(\frac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0)$.
ج. حدد : $\lim_{n\to\infty}(v_n-u_n)$.
4. استنتج أن المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متحاذيتين .
5. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}:\ v_n=\dfrac{1}{2^n\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$.
وأن : $\forall n\in\mathbb{N}:\ u_n=v_n\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$.
6. حدد النهايتين التاليتين : $\lim_{n\to\infty}u_n$ و $\lim_{n\to\infty}v_n$.

التمرين 15 :

I- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :
$$f(x)=Arc\tan(x)+2x-1$$
1. أثبت أن : $\forall x\in\mathbb{R}:\ f'(x)>2$.
2. بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.
3. بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α وأن $\alpha\in]0,1[$.
4. بين أن : $\forall x>\alpha:\ f(x)>x$.

II- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} u_0=b & , \quad (b>\alpha) \\ u_{n+1}=f^{-1}(u_n) & , \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$
1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}:\ u_n>\alpha$.
2. أدرس رتابة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ واستنتج أنها متقاربة .

III-
1. باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية , بين أن :
$$\forall n\in\mathbb{N}:\ u_{n+1}-\alpha<\frac{1}{2}(u_n-\alpha)$$
2. استنتج : $\lim_{n\to\infty}u_n$.

التمرين 16 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-Arc\tan x}{|Arc\tan x|} & , \quad x\in\mathbb{R}^* \\ f(0)=0 \end{cases}$$
وليكن (C) منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I-
1. حدد D حيز تعريف الدالة f .
2. أدرس زوجية f واستنتج D_E مجموعة دراسة f .
3. أدرس اتصال f في النقطة 0 .
4. أ. بين أن : $\forall x>0: Arc\tan(x)+Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$
ب. حدد المستقيم (Δ) المقارب المائل ل (C) بجوار $+\infty$.

II-
1. أ. باستعمال مبرهمة التزايدات المنتهية بين أن :
$$\forall x>0:\ 0<\frac{x-Arc\tan x}{x}<\frac{x^2}{1+x^2}$$
ب. بين أن : $\forall x>0:\ \frac{x}{1+x^2}<Arc\tan x$
2. أدرس اشتقاق الدالة f على يمين 0 وأعط تأويلا هندسيا لذلك .
3. أدرس تغيرات f على D_E وأعط جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.
4. أ. بين أن :
$$\forall x>0:\ f''(x)=\frac{2Arc\tan x\,(x-Arc\tan x)}{\left((1+x^2)Arc\tan^2 x\right)^2}$$
ب. استنتج تقعر (C) .

III- ليكن g قصور الدالة f على المجال $[0,+\infty[$.
1. بين أن g تقابل من $[0,+\infty[$ نحو $[0,+\infty[$.
2. أدرس اشتقاق g^{-1} على المجال $]0,+\infty[$.
3. أنشئ (C) و $(C_{g^{-1}})$ منحنى g^{-1} في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

التمرين 17 :

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$. نعتبر f_n الدالة العددية المعرفة بما يلي :
$$f_n(x)=Arc\cos\left(\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\right)$$

I- 1. أ. بين أن f_n معرفة على $\mathbb{R}$.

ب. أدرس زوجية f_n ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.

2. أ. بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f_n(x) = \pi - 2Arc\tan(x^n)$.

ب. بين أن الدالة f_n قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ وأن :

$$\forall \in]0,+\infty[: \quad f_n'(x) = \frac{-2nx^{n-1}}{x^{2n}+1}$$

ج. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في 0 :

(ميز بين حالتين : $n = 1$ و $n \neq 1$)

د. أعط جدول تغيرات f_n على $\mathbb{R}$ في كلتا الحالتين: $n=1$ و $n\neq 1$

3. ليكن g_n قصور الدالة f_n على $\mathbb{R}^+$. بين أن g_n تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو مجال I ينبغي تحديده؛ ثم حدد $g_n'(x)$ بدلالة $\cot an\left(\frac{x}{2}\right)$.

II- نأخذ في كل ما يلي $n = 1$.

1. بين أن : $\exists ! \alpha \in]1,2[\quad / \quad f_1(\alpha) = \alpha$.

2. أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ منحنى f_1 على $\mathbb{R}$ ومنحنى g_1^{-1} .

التمرين 18 : لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي:

$$f(x) = 2Arc\cos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + Arc\sin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - Arc\tan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f .

2. بسط كتابة $f(x)$ لكل x من D . (يمكن وضع $x = \tan(\theta)$)

3. حل المعادلة : $f(x) = \dfrac{2\pi}{3} \quad : \quad x \in \mathbb{R}$.

التمرين 19 : لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\pi x}{2Arc\tan x} & , \quad x \neq 0 \\ f(0) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

1. أ. تحقق من أن f دالة زوجية .

ب. أحسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. بين أن : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{Arc\tan x}{x} = 1$ ؛ ثم استنتج أن الدالة f متصلة في $x_0 = 0$.

3. أ. بين أن : $\forall x > 0, \quad \forall c \in]0,x[: \quad \dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{1}{1+c^2} < 1$

ب. بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t \mapsto Arc\tan t$ في مجال $[0,x]$ بحيث $x > 0$ ؛ أثبت أن :

$$\frac{1}{1+x^2} < Arc\tan x < x$$

ج. بين أن f قابلة للإشتقاق على اليمين في $x_0 = 0$ ؛ ثم أعط التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها .

4. أ. أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$.

ب. أدرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}^{+*}$ (يمكن استعمال نتيجة 3- ب)

ج. أعط جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$.

5. أ. بين أن : $\forall x > 0 : \quad Arc\tan x + Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

ب. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

6. أنشئ المنحنى (C) . <u>الوحدة = 2cm</u>.

التمرين 20 :

I - لتكن g الدالة المعرفة على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{\tan x - x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1. بين أن : $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[: \quad (1+\tan^2 x)x - \tan x > 0$

2. أ. بين أن :

$$\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[: \quad g'(x) = \frac{(1+\tan^2 x)x - \tan x}{x^2}$$

ب. بين أن الدالة g متصلة على اليمين في 0 ثم أعط رتابة g على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

II- لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = Arc\tan(g(x)) & , \quad x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\\ f(0) = 0 & , \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1. أدرس اتصال f على اليمين في 0 وعلى اليسار في $\frac{\pi}{2}$.

2. أ. بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t \mapsto \tan t - t$ على المجال $[0,x]$ بحيث $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ؛ أثبت أن :

$$\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[: \quad 0 \leq \tan x - x \leq x\tan^2(x)$$

ب. أحسب : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^2}$.

ج. أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0 ؛ ثم أعط تأويلا هندسيا.

3. أ. بين أن : $\forall t > 0 : Arc\tan(t) + Arc\tan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$

ثم استنتج أن :

$$\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[: \quad f(x) - \frac{\pi}{2} = -Arc\tan\left(\frac{x}{\tan x - x}\right)$$

ب. بين أن :

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}}$$

4. أدرس تغيرات g وأعط جدول تغيراتها .

5. أنشئ (C) . <u>الوحدة = 2cm</u>.

التمرين 21 : لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} f(x)=1+\sqrt[3]{x^3-2x^2} & , \quad x\ge 2 \\ f(x)=\dfrac{2}{\pi}Arc\tan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}\right) & , \quad x<2 \end{cases}$$

A. 1. حدد D_f ؛ حيز تعريف الدالة f .

2. أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0=2$.

3. أحسب نهايات f عند محدات D_f ؛ ثم أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) .

4. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار في النقطة $x_0=2$ . .

5. أحسب $f'(x)$ لكل x من المجال $]-\infty,2[$ ولكل x من المجال $]2,+\infty[$ ؛ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .

6. أرسم (C_f) . (نعطي : $f(0)\simeq 0,4$)

7. ليكن g قصور الدالة f على المجال $]-\infty,2[$.

بين أن g تقابل من المجال $]-\infty,2[$ نحو مجال يجب تحديده.

حدد g^{-1} ثم مثل منحناها في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

B. 1. أ. بين أنه يوجد عدد حقيقي k من المجال $]0,1[$ بحيث : $0<g'(x)<k$ ؛ ثم استنتج رتابة الدالة h على المجال $]0,1[$ حيث : $h(x)=g(x)-x$.

ب. بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,1[$ بحيث: $g(\alpha)=\alpha$.

2. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{4} \\ u_{n+1}=g(u_n) \quad , \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad 0<u_n<1$.

ب. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad |u_{n+1}-\alpha|<k\,|u_n-\alpha|$.

ج. استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وأن نهايتها هي α .

التمرين 22 : نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=2\left(x+Arc\sin\left|1+\dfrac{1}{x}\right|\right) & , \quad x\le -\dfrac{1}{2} \\ f(x)=\sqrt[3]{x^2(2x+1)}+\pi-1 & , \quad x>-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

و (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=2cm$.

1. أ. أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0=-\dfrac{1}{2}$.

ب. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقط : $x_0=-\dfrac{1}{2}$ و $x_1=0$ و $x_2=-1$. (يمكنك استعمال $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{Arc\tan X}{X}=1$)

2. أ. أدرس تغيرات الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي : $g(x)=x\sqrt{-2x-1}+1$.

ثم استنتج إشارتها . (أحسب : $g(-1)$)

ب. أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*-\left\{-1,-\dfrac{1}{2}\right\}$.

ج. أعط جدول تغيرات الدالة f .

3. أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) .

4. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α وأن $-1<\alpha<-\dfrac{1}{2}$

5. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge 1}$ المعرفة بما يلي :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad : \quad u_n=f(-n)-f(-n-1)$$

أ. بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ يوجد عدد حقيقي c_n من $]-n-1,-n[$ بحيث : $u_n=f'(c_n)$.

ب. بين أن المتتالية $(u_n)_{n\ge 1}$ متقاربة وأحسب نهايتها .

التمرين 23 : نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=Arc\cos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)-Arc\tan(x)$$

ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. حدد D مجموعة تعريف الدالة f .

2. أ. حدد نهايات الدالة f عند محدات D.

ب. استنتج الفروع اللانهائية للمنحنى (C) .

3. أ. بين أن :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{Arc\cos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{x}=2$$

وأن :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{Arc\cos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{x}=-2$$

ب. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة 0 وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة .

ج. لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f . أحسب $f'(x)$ لكل x من $D-\{0\}$.

د. ضع جدول تغيرات الدالة f .

4. أنشئ المنحنى (C) .

5. لتكن g قصور الدالة f على المجال $[0,+\infty[$.

أ. أثبت أن g تقابل من $[0,+\infty[$ نحو مجال I يجب تحديده .

ب. بين أن :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad : \quad Arc\cos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)=2Arc\tan x$$

ج. لتكن g^{-1} الدالة العكسية للدالة g .

أحسب $g^{-1}(x)$ لكل x من I .

د. أنشئ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ؛ منحنى الدالة g^{-1} .

التمرين 24 : لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,8]$ بما يلي : $f(x)=\sqrt{\left(4-\sqrt[3]{x^2}\right)^3}$

1. أ. بين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-8}{x}=-\infty$

ب. بين أن الدالة f تناقصية قطعا على المجال $[0,8]$.

ج. بين أن الدالة f تقابل من $[0,8]$ نحو مجال يتم تحديده.

2. ليكن (C) و (C') المنحنيين الممثلين للدالة f ولتقابلها العكسي f^{-1} على التوالي في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أ. بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ هو محور تماثل المنحنى (C) .

ب. استنتج تعبير $f^{-1}(x)$ بدلالة x .

ج. أحسب النهاية $\lim\limits_{\substack{x\to 8\\ x<8}}\frac{f(x)}{x-8}$

د. أرسم المنحنى (C) .

3. نعتبر النقطتين $A(8,0)$ و $B(0,8)$ والدالة g المعرفة على $[0,8]$ بما يلي : $g(x)=f(x)+x-8$

أ. بين أن : $\exists\alpha\in]0,8[\;\;/\;\; g'(\alpha)=0$

ب. استنتج أن المنحنى (C) مماس موازٍ للمستقيم (AB) في نقطة M_0 أفصولها α , ثم حدد α .

4. نعتبر المتتالية العددية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases}\alpha<x_0<8\\ \forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\end{cases}$$

أ. مثل في المعلم السابق على محور الأفاصيل النقط التي أفاصيلها x_0 و x_1 و x_2 و x_3 .

ب. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad \alpha<x_n<8$.

ج. بين أن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبة.

د. استنتج أن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

ه. أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

التمرين 25 : نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases}f(x)=Arc\sin(x-1)-\sqrt{2x-x^2}+2-\dfrac{\pi}{2};x\in[0,2]\\ f(x)=x-\sqrt{x^2-4};x\in]2,+\infty[\end{cases}$$

(C) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. أ. حدد D مجموعة تعريف الدالة f . هل الدالة f متصلة في النقطة $x_0=2$ ؟

ب. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C).

2. أحسب $f'(x)$ لكل $x\in]0,2[$ أحسب $f'(x)$ لكل $x\in]2,+\infty[$.

3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة $x_0=2$.

4. أ. بين أن : $\forall t\in]0,1[:\frac{t}{\sqrt{2t-t^2}}<\sqrt{t}$

ب. بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على المجال $[0,x]$ ؛ ($0<x<1$) بين أن : $0<\frac{f(x)-f(0)}{x}<\sqrt{x}$

ثم استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر محددا العدد المشتق للدالة f على اليمين في الصفر.

5. أ. بين أن : $\forall x\in]1,2[\;:\; \frac{f(x)-f(2)}{x-2}>\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

(استعمل مبرهنة التزايدات المنتهية على المجال $[x,2]$)

ب. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في النقطة $x_0=2$.

6. أ. ضع جدول تغيرات الدالة f .

ب. بين أن : $\exists\alpha\in\left]1,\frac{3}{2}\right[\;/\; f(\alpha)=0$.

ج. أدرس تقعر المنحنى (C) .

د. أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

7. لتكن φ الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\forall x\in[1,+\infty[\;:\; \varphi(x)=f(x+2)$$

أ. بين أن : $\forall x\in[1,+\infty[\;:\; \frac{2}{x+2}<\varphi(x)<\frac{2}{x}$

ب. استنتج أن : $\forall x\in[1,+\infty[\;:\; \frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}<\varphi(x)<\frac{2}{x}$

ج. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \;:\; u_n=\varphi\left(\frac{n^2}{1}\right)+\varphi\left(\frac{n^2}{2}\right)+...+\varphi\left(\frac{n^2}{n}\right)$$

باستعمال السؤال (7- ب) , بين أن :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \;:\; \frac{n+1}{n}-\frac{2(n+1)(2n+1)}{3n^3}<u_n<\frac{n+1}{n}$$

(تذكير : $\sum_{p=1}^{n}p^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

ثم استنتج أن $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة محددا نهايتها .

التمرين 26 : ليكن a عددا حقيقيا حيث : $|a|<1$ ولتكن f_a الدالة لعددية لمتغير حقيقي x والمعرفة بما يلي :

$$f_a(x)=Arc\cos\left(\frac{a+\cos(x)}{1+a\cos(x)}\right)$$

1. أ. أثبت أنه : $\forall x\in\mathbb{R} \;:\; 1+a\cos(x)>0$

ب. أوجد D مجموعة تعريف الدالة f_a .

2. أ. أثبت أنه يمكن الاقتصار على المجال $[0,\pi]$ لدراسة الدالة f_a .

ب. بين أنه : $\forall x\in]0,\pi[\quad : \quad f_a'(x)=\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{1+a\cos(x)}$

3. لتكن φ_a الدالة العددية لمتغير حقيقي المعرفة على المجال $[0,\pi]$ بما يلي :

$$\varphi_a(x)=\frac{1}{1+a\cos(x)}-\frac{1}{1+a}$$

أ. أدرس , حسب قيم الوسيط الحقيقي a , تغيرات الدالة φ_a .

ب. استنتج أنه :

$$\forall(c,x)\in\mathbb{R}^2 \quad : \quad 0<c<x<\pi \Rightarrow |\varphi_a(c)|\le|\varphi_a(x)|$$

ج. بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة : $h:t\mapsto f_a(t)-\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}.t$ وعلى المجال $[0,x]$ حيث $0<x<\pi$ أثبت أن: $\left|f_a(x)-\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}x\right|\le x\sqrt{1-a^2}\,|\varphi_a(x)|$

د. استنتج أن f_a قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة π .

5. أعط جدول تغيرات الدالة f_a على المجال $[0,\pi]$.

6. لتكن g_a الدالة المعرفة من المجال $[0,\pi]$ نحو المجال $[0,\pi]$ بما يلي :

$$g_a(x)=f_a(x)$$

أ. بين أن g_a تقابل .

ب. أثبت أن : $(g_a)^{-1}=g_{-a}$.

7. ليكن (C_a) المنحنى الممثل للدالة f_a على المجال $[-\pi,\pi]$ في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أرسم $\left(C_{\frac{1}{2}}\right)$ و $\left(C_{-\frac{1}{2}}\right)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

التمرين 27 :

1. لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال $[a,b]$ بحيث : $f(a)=f(b)$ و $a<b$.

بين أن : $\forall x\in]a,b[\quad ; \quad \exists c\in]a,b[\quad /$

$$f(x)=(x-a)(x-b)\frac{f''(c)}{2}$$

2. ماذا يمكن أن تستنتج بالنسبة لمنحنى الدالة f إذا كان لدينا :

$$\forall x\in[a,b] \quad : \quad f''(x)>0$$

3. لتكن f دالة قابلة للاشتقاق ثلاث مرات على مجال $[a,b]$ حيث $a<b$ ؛ ولتكن x_1 و x_2 و x_3 ثلاثة أعداد حقيقية بحيث :

$$a\le x_1<x_2<x_3\le b$$

و $\forall i\in\{1,2,3\}:f(x_i)=0$

بين أن : $\forall x\in]a,b[\quad ; \quad \exists c\in]a,b[\quad /$

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\frac{f'''(c)}{3!}$$

التمرين 28 : ليكن a و b عددين حقيقيين حيث $a<b$ ولتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة عددية قابلة للاشتقاق n مرة(حيث $n\ge2$) و $f^{(n)}$ متصلة على المجال $[a,b]$.

لتكن x_1 و x_2 و...و x_n أعداد حقيقية بحيث :

$$\forall i\in\{1,2,...,n\} \ : \ f(x_i)=0 \text{ و } a\le x_1<x_2<...<x_n\le b$$

1. بين أن : $\forall x\in[a,b] \quad , \quad \exists c\in[a,b] \quad /$

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$

2. نضع : $M=\underset{x\in[a,b]}{Max}\left|f^{(n)}(x)\right|$. بين أن :

$$\forall x\in[a,b]:|f(x)|\le\frac{M}{n!}\prod_{i=1}^{n}|x-x_i|$$

3. بين أن: $\forall i\in\{1,2,...,n\} \quad : \quad |f'(x_i)|\le\dfrac{M}{n!}\prod_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}|x_i-x_j|$

4. **تعميم :** بين أن:

$$\forall x\in[a,b] \quad : \quad |f'(x)|\le\frac{M}{n!}\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}|x-x_j|\right)$$

ماذا يمكن أن تستنتج من أجل $n=2$ و $x_1=a$ و $x_2=b$ ؟

التمرين 29 : Règle de L'Hospital

1. لتكن f و g دالتين عدديتين متصلتين على مجال $[a,b]$ وقابلتين للاشتقاق على المجال $]a,b[$. بين أن :

$$\exists c\in]a,b[\quad : \quad [f(b)-f(a)]g'(c)=[g(b)-g(a)]f'(c)$$

بإمكانك استعمال الدالة العددية :

$$\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto[f(b)-f(a)]\times[g(x)-g(a)]-[g(b)-g(a)]\times[f(x)-f(a)]$$

__ملاحظة :__ إذا كان $g'(c)\ne0$ و $g(a)\ne g(b)$, فإن :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

2. أ. بين أنه إذا كان $f(a)=g(a)=0$ وأن $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\ne a}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$ ؛

فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\ne a}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$

ب. أحسب : $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{Arc\tan(x)-\dfrac{\pi}{3}}{x-\sqrt{3}}$

ج. __انتبه :__ الإستلزام المعاكس للإستلزام (2 – أ) خاطئ .
أعط مثالا مضادا .