

Résolution d'une inéquation

Résoudre sur $\mathbb{R} - \{2\}$ l'inéquation (I) suivante : $\frac{-2x+16}{-x+2} \geq x+7$

(I) équivaut à $\frac{-2x+16}{-x+2} - x - 7 \geq 0$

On se ramène à une inéquation du type $A(x) \geq 0$

$$\frac{-2x+16}{-x+2} + \frac{(-x-7)(-x+2)}{-x+2} \geq 0$$

On réduit au même dénominateur

$$\frac{-2x+16+x^2-2x+7x-14}{-x+2} \geq 0$$

Donc (I) équivaut à : $\frac{x^2+3x+2}{-x+2} \geq 0$

On va étudier le signe du quotient à l'aide d'un tableau de signes

Étudions le signe du trinôme $x^2 + 3x + 2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$$

Donc il y a deux racines $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 1}{2} = -2$

et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 1}{2} = -1$

Le trinôme est du signe de $a = 1$, donc positif, à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	-2	-1	2	$+\infty$		
$-x+2$	+		+	0	-		
x^2+3x+2	+	0	-	0	+		
$\frac{x^2+3x+2}{-x+2}$	+	0	-	0	+		-

$$S =]-\infty; -2] \cup [-1; 2[$$

Remarque : $\frac{-2x+16}{-x+2} \geq x+7$ n'est pas équivalent à $-2x+16 \geq (x+7)(-x+2)$

Car en multipliant par $(-x+2)$, on doit considérer le signe de ce terme qui n'est pas toujours positif (puisque'il dépend de x).