MATHÉMATIQUES OBLIGATOIRES

Durée : 4 heures

La calculatrice est autorisée uniquement en mode examen

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans l'ensemble du sujet, et pour chaque question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (6 points) Pour tous les candidats

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x + 2)e^{x-4} - 2$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Démontrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2.
3. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa dérivée.
   Calculer $g'(x)$ pour tout réel x, puis dresser le tableau de variations de g.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
6. A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

Partie B : Etude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x^2e^{x-4}$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f ' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = -xg(x)$ où la fonction g est celle définie à la partie A.
   Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$ est égal à $\dfrac{\alpha^3}{\alpha + 2}$.

Partie C : Aire d'un domaine

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on note D le domaine compris entre la courbe représentative C_f de la fonction f, la parabole P d'équation $y = x^2$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.

1. Déterminer la position relative des courbes C_f et P .
2. Justifier qu'une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est définie par $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - (x^2 - 2x + 2)e^{x-4}$.
   Calculer l'aire du domaine D en unité d'aire. On donnera la valeur exacte.

Exercice 2 : (4 points) Pour tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ d'unité 2 cm. On appelle f la fonction qui, à tout point M, distinct du point 0 et d'affixe un nombre complexe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\dfrac{1}{z}$.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1 + i$ et $z_B = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

   a) Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point A' image du point A par la fonction f.
   b) Déterminer la forme exponentielle de l'affixe du point B' image du point B par la fonction f.
   c) Sur la copie, placer les points A, B, A' et B' dans le repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.
   Pour les points B et B', on laissera les traits de construction apparents.

2. Soit r un réel strictement positif et θ un réel. On considère le complexe z défini par $z = re^{i\theta}$.

a) Montrer que $z' = \frac{1}{r}e^{i(\pi-\theta)}$.

b) Est-il vrai que si un point M, distinct de 0, appartient au disque de centre 0 et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre 0 et de rayon 1, alors son image M' par la fonction f est à l'extérieur de ce disque ? Justifier.

3. Soit le cercle Γ de centre K d'affixe $z_K = -\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

a) Montrer qu'une équation cartésienne du cercle Γ est $x^2 + x + y^2 = 0$.

b) Soit $z = x + iy$ avec x et y non tous les deux nuls. Déterminer la forme algébrique de z' en fonction de x et y.

c) Soit M un point, distinct de O, du cercle Γ. Montrer que l'image M' du point M par la fonction f appartient à la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 3 : (5 points) Pour tous les candidats

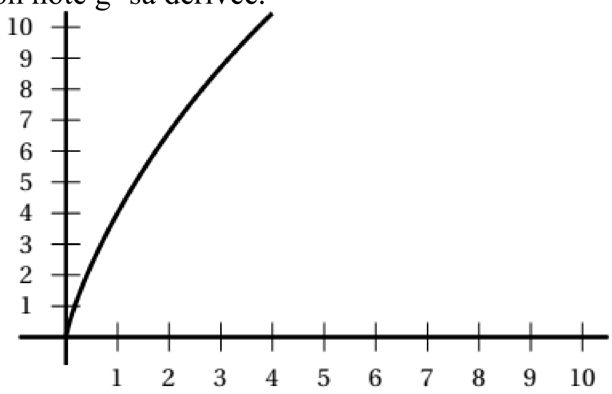
Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = 4x - x\ln(x)$.

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on note g' sa dérivée.

Partie A

Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe C_g représentative de la fonction g obtenue par un élève sur sa calculatrice. Cet élève émet les deux conjectures suivantes :

- il semble que la fonction g soit positive;
- il semble que la fonction g soit strictement croissante.



L'objectif de cette partie est de valider ou d'invalider chacune de ces conjectures.

1. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
3. Les conjectures de l'élève sont-elles vérifiées ?

Partie B

Dans cette partie, on poursuit l'étude de la fonction g.

1.a) On rappelle que $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$. En déduire que $\lim_{x \to 0} x\ln(x) = 0$.

b) Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0.

c) Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2.a) Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = 3 - \ln(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

3. Question bonus risquant de nécessiter un dépassement de temps

On désigne par G la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $G(x) = \frac{1}{4}x^2(9 - 2\ln(x))$.

On admet que la fonction G est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

a) Démontrer que la fonction G est une primitive de la fonction g sur $]0 ; +\infty[$.

b) L'affirmation suivante est-elle vraie ?

« Il n'existe aucun réel α strictement supérieur à 1 tel que $\int_1^{\alpha} g(x)\,dx = 0$. ».

Partie C

Soit Δ la droite d'équation $y = x$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Etudier le signe de $g(x) - x$, en déduire la position relative de C_g et de Δ.

2.a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq e^3$.

b) Etudier les variations de (u_n), en déduire qu'elle converge vers un réel ℓ.

c) Donner, en justifiant la réponse, la valeur de ℓ.

Exercice 4 : (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,000 1 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note :

M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;

T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
   a) Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
   b) Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.
3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif.
   Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?
4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
   a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   b) Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?
5. On suppose maintenant que le nombre d'animaux choisis est n ($n \in \mathbb{N}$).
   Quelle est la plus grande valeur de n pour laquelle la probabilité qu'aucun animal parmi les n choisis n'ait un test positif soit plus grande que 0,5.
6. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.
   D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

   a) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
   b) Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

Exercice 4 : (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par $a_n = \dfrac{4^{2n+1}+1}{5}$.

1. Calculer a_2 et a_3.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 16a_n - 3$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, a_n est un nombre entier naturel, c'est à dire que 5 divise $4^{2n+1} + 1$.
4. Dans cette question on utilise l'égalité de la question 2. afin de démontrer plusieurs propriétés des termes de la suite (a_n).
   a) Pour tout entier naturel n, on note d_n le plus grand diviseur commun de a_n et a_{n+1}.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n, d_n est égal à 1 ou à 3.
   b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} \equiv a_n$ [3].
   c) Vérifier que $a_0 \equiv 1$ [3].
   En déduire que, pour tout entier naturel n, le nombre a_n n'est pas divisible par 3.
   d) Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.
5. L'objectif de cette question est de démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, le nombre a_n n'est pas premier, c'est à dire qu'il admet un diviseur autre que 1 ou lui-même.
   On pose, pour tout entier naturel n, $b_n = 2^{n+1}(2^n - 1) + 1$ et $c_n = 2^{n+1}(2^n + 1) +1$.

On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $5a_n = b_n c_n$.

a) Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, que si 5 ne divise pas b_n alors 5 divise c_n.

On a donc : soit 5 divise b_n, soit 5 divise c_n.

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que $b_n > 5$ et $c_n > 5$.

c) En déduire que a_n admet un diviseur différent de 1 ou de lui-même.