Exercice 1

Partie A :

1. g étant une fonction polynôme, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$

2.

   Pour tout réel x, $g'(x) = -3x^2 - \frac{1}{2}$

   Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$ donc $-3x^2 \leq 0$ puis $-3x^2 - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}$ et donc $g'(x) < 0$.

   Il en résulte que la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	α	1	$+\infty$
g'			$-$		
g	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	0	-1	$-\infty$

3. D'après le tableau de variation, la fonction g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Comme $0 \in \left]-\infty\,;+\infty\right[$, alors d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

$g(1) < g(\alpha) < g(0)$

$\Rightarrow 1 > \alpha > 0$ c'est-à-dire $0 < \alpha < 1$

De plus, comme $g(0) = \frac{1}{2}$ et $g(1) = -1$ alors par stricte décroissance de g sur $\mathbb{R}$, il vient que nécessairement $\alpha \in \left]0\,;1\right[$.

Comme $\left.\begin{array}{l} g(0,5) = 0,125 \\ g(0,6) = -0,016 \end{array}\right\}$ *alors* $0,5 < \alpha < 0,6$ (par stricte décroissance de la fonction g sur $\mathbb{R}$)

Enfin $\left.\begin{array}{l} g(0,58) \approx 0,015 \\ g(0,59) = -0,003 \end{array}\right\}$ *alors* $0,58 < \alpha < 0,59$ (par stricte décroissance de la fonction g sur $\mathbb{R}$)

En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x.

Il en résulte que $g(x) \geq 0$ lorsque $x \leq \alpha$ et $g(x) < 0$ lorsque $x > \alpha$

Ce que l'on peut résumer par le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B :

1. Pour tout réel x, $f'(x) = 4x^3 + 2x - 2 = -4(-x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) = -4g(x)$

2.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	
-4		$-$		$-$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

Exercice 2

Partie A :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x}{4x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}$ (limite de fonction rationnelle)

De plus $\lim\limits_{X\to\frac{1}{4}} \sqrt{X} = \frac{1}{2}$ donc par composition $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \frac{1}{2}}$

Déterminer la limite de h en $\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} x^2 - x = -\frac{1}{4} \\ \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x<\frac{1}{2}}} 4x^2 - 1 = 0^- \end{array}\right\} \textit{par quotient} \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x<\frac{1}{2}}} \frac{x^2 - x}{4x^2 - 1} = +\infty$$ et comme $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ alors par composition

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x<\frac{1}{2}}} h(x) = +\infty}$$

Le trinôme $x \mapsto 4x^2 - 1$ est du signe de a, à l'extérieur des racines avec $a = 4 > 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $4x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. **Interprétation graphique :**

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \frac{1}{2}$ alors la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_h$ au voisinage de $-\infty$.

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x<\frac{1}{2}}} h(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_h$

Partie B :

Pour tout réel x, $-1 \le \sin x \le 1$

On ajoute x à chaque membre de la double inégalité

On a successivement $\quad x-1 \leq x+\sin x \leq x+1$

$$\frac{x-1}{x^2+1} \leq \frac{x+\sin x}{x^2+1} \leq \frac{x+1}{x^2+1}$$

On multiplie chaque membre de la double inégalité par $\dfrac{1}{x^2+1}$ qui est strictement positif.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ (limite à l'infini d'une fonction rationnelle)

De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ (limite à l'infini d'une fonction rationnelle)

Il en résulte d'après le théorème des gendarmes (ou théorème d'encadrement) que $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$

La fonction $x \mapsto \sin x$ n'admet pas de limite à l'infini…

Exercice 3

1. $u_1 = \sum\limits_{k=0}^{1} \dfrac{1}{k\,!} = \dfrac{1}{0\,!} + \dfrac{1}{1\,!} = 1+1 = 2$ et $v_1 = u_1 + \dfrac{1}{1 \times 1\,!} = 3$

$u_2 = \sum\limits_{k=0}^{2} \dfrac{1}{k\,!} = \dfrac{1}{0\,!} + \dfrac{1}{1\,!} + \dfrac{1}{2\,!} = 1+1+\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$ et $v_2 = u_2 + \dfrac{1}{2 \times 2\,!} = \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{4}$

2.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = = u_{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} - \left(u_n + \dfrac{1}{n \times n\,!}\right)$

$$= \frac{1}{(n+1)\,!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \times n\,!} = \frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$$

Comme pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$.

On en déduit alors que la suite (v_n) est strictement décroissante.

3. Si on rajoute que (v_n) est minorée alors elle serait convergente d'après le théorème de convergence monotone.

4.

```
Variables :        n, i et P entiers naturels
Initialisation :   P ← 1
Traitement :       Saisir N
                      Pour i variant de 1 à n
                         P ← P × i
                      Fin Pour
Sortie :           Afficher P
```