Exercice 1.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle.

Soit (E) : $y'' + 2y' + y = 2$

1. Soit (E_0) : $y'' + 2y' + y = 0$
   Soit l'équation caractéristique.
   $r^2 + 2r + 1 = 0$ (formulaire)
   $\Delta = 0$ et $r_0 = -1$
   donc $\underline{y_0 = (\lambda x + \mu)e^{-x}}$ (formulaire)
   (avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$)

2. Soit g une solution particulière de (E).
   Le second membre de (E) étant une fonction constante
   on cherche g de la forme $g(x) = b$. $(b \in \mathbb{R})$
   Si g est solution de (E)
   alors $g'' + 2g' + g = 2$
   $g(x) = b \Leftrightarrow g'(x) = g''(x) = 0$ donc $\underline{g(x) = b = 2}$.

3. $y = y_0 + g$ donc $\underline{y = (\lambda x + \mu)e^{-x} + 2}$ $\left| \begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{R} \\ \mu \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$

4. On cherche la solution particulière f vérifiant.
   $f(x) = (\lambda x + \mu)e^{-x} + 2$ et $\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(-\frac{1}{2}) = 2. \end{cases}$

   $f(0) = \mu + 2 = 3 \Leftrightarrow \underline{\mu = 1}.$

   $f(-\frac{1}{2}) = \left(-\frac{\lambda}{2} + 1\right)e^{1/2\,x} + 2 = 2$

   $\Leftrightarrow \left(-\frac{\lambda}{2} + 1\right)e^{1/2\,x} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\lambda}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda = 2}$

   donc $\underline{f(x) = (2x + 1)e^{-x} + 2}$

Partie B : Etude d'une fonction

$f(x) = (2x+1)\,e^{-x} + 2$

1. $\underline{\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty}$ car $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{-\infty} (2x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{-\infty} (e^{-x}) = +\infty\end{array}\right\}$ et règle des signes.

2 a/ $f(x) = 2x\,e^{-x} + e^{-x} + 2$

$\underline{\lim\limits_{+\infty} f(x) = 2}$ car $\lim\limits_{+\infty} (e^{-x}) = 0$

b) donc la droite $\mathcal{D}$ d'équation $\underline{y = 2}$ est une $\underline{\text{asymptote}}$ $\underline{\text{horizontale à la courbe de } f \text{ en } +\infty}$

c) cf document.

3 a/ $\underline{f'(x)} = 2 \times e^{-x} + (2x+1) \times (-e^{-x})$

$= e^{-x}\left[2 - (2x+1)\right]$

$\underline{= e^{-x}\left[1 - 2x\right]}$

b) $\underline{\text{variations de } f}$: étude du signe de $f'(x)$

$e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2x$ (fonction affine)

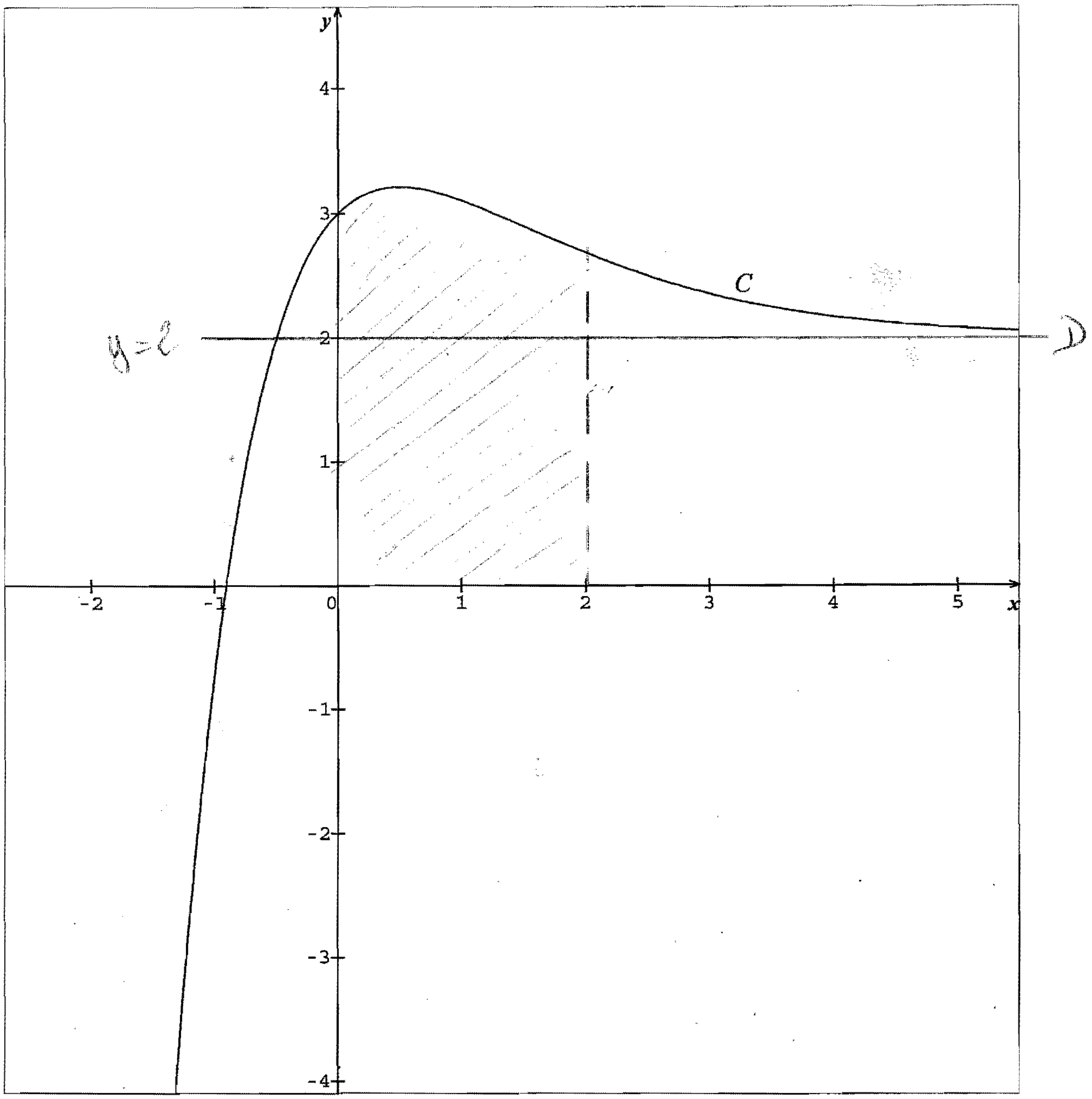
x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗		↘	2

$f(1/2) = (1+1)e^{-1/2} + 2$

$= 2e^{-1/2} + 2$

$= \dfrac{2}{\sqrt{e}} + 2 = \underline{2\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)}$

Annexe (à rendre avec la copie)



4 soit $F(x) = (-2x-3)e^{-x} + 2x$

a) si F est une primitive de f, alors $F' = f$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

$$F'(x) = (-2)e^{-x} + (-2x+3)(-e^{-x}) + 2$$
$$= e^{-x}[-2 + 2x + 3] + 2$$
$$= e^{-x}[1 + 2x] + 2 = f(x)$$

donc F est une primitive de f.

b) L'unité d'aire : $ua = 4\ cm^2$

$$A = \int_0^2 f(x)\,dx = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0)$$
$$= (-7 \times e^{-2} + 4) - (-3)$$
$$= 7 - 7e^{-2} \simeq 6{,}05\ ua$$

$$A = (7 - 7e^{-2}) \times 4 = 28(1-e^{-2})\ cm^2 \simeq 24{,}21\ cm^2$$

Exercice 2 (Résultats à 10^{-3})

Partie A

$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(238 ; 0,4)$

soit $T \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$ la loi centrée normale.

$$T = \frac{X - m}{\sigma} = \frac{X - 238}{0,4}$$

$P(237,18 \leq X \leq 238,82)$

$$= P\left(\frac{237,18 - 238}{0,4} \leq T \leq \frac{238,82 - 238}{0,4}\right)$$

$$= P\left(-\frac{0,82}{0,4} \leq T \leq \frac{0,82}{0,4}\right)$$

$$= P(-2,05 \leq T \leq 2,05)$$

$$= 2\Pi(2,05) - 1 = 2 \times 0,9798 - 1$$

$$= \underline{\underline{0,96}}$$

Partie B

En lisant le sujet, il est évident que l'on doit tenir compte de lots de 50 disques et non de 25 !!!
(Merci à l'auteur du sujet de la part de mes élèves ...)

1. $Y_1 \rightsquigarrow \underline{\mathcal{B}(50 ; 0,04)}$
   - répétition d'expériences identiques à 2 issues
   - indépendance des tirages (avec remise)

2. $\underline{P(Y_1 = 0)} = C_{50}^{0} \times 0,04^0 \times 0,96^{50} \simeq \underline{0,129}$

3. a) Par conservation de l'espérance :

   $\underline{\lambda = n \times p} = 50 \times 0,04 = \underline{2}$!

   donc $\underline{Y_2 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda = 2)}$

b) $P(Y_2 \leq 3) = P(Y_2 = 0) + P(Y_2 = 1) + P(Y_2 = 2)$
$+ P(Y_2 = 3)$

Formulaire.

$\underline{P(Y_2 \leq 3)} = 0{,}135 + 0{,}271 + 0{,}271 + 0{,}180$
$= \underline{0{,}857}$

Partie C.

Test : $H_0 : \mu = 238$ au risque de 5%.

1. Hypothèse alternative : $\mu \neq 238$

2. Sous H_0 $\quad \bar{Z} \hookrightarrow \mathcal{N}(238\,;\,0{,}06)$

Soit $T \hookrightarrow \mathcal{N}(0\,;\,1)$ avec $T = \dfrac{\bar{Z} - m}{\sigma} = \dfrac{\bar{Z} - 238}{0{,}06}$

$P(238 - h \leq \bar{Z} \leq 238 + h) = 0{,}95$ (risque de 5%)

$\Leftrightarrow P\left(\dfrac{-h}{0{,}06} \leq T \leq \dfrac{h}{0{,}06}\right) = 0{,}95$

$\Leftrightarrow 2\Pi\left(\dfrac{h}{0{,}06}\right) - 1 = 0{,}95$

$\Leftrightarrow \Pi\left(\dfrac{h}{0{,}06}\right) = 0{,}975$

lecture inverse de la table

$\Leftrightarrow \dfrac{h}{0{,}06} = 1{,}96$

$\Leftrightarrow \underline{h = 0{,}118}$ (à 10^{-3})

3. $P(237{,}882 \leq \bar{Z} \leq 238{,}118) = 0{,}95$

si la moyenne μ de la livraison est dans l'intervalle, on accepte la livraison au risque de 5%

sinon on rejette la livraison.

4. dans une livraison on obtient

$\bar{z} = 237,91$ mm

$\bar{z}$ appartient à l'intervalle au risque de 5%

donc on accepte la livraison.