École des Hautes Études Commerciales de Montréal

03-203-94 GESTION DE PORTEFEUILLE **HIVER 1999**

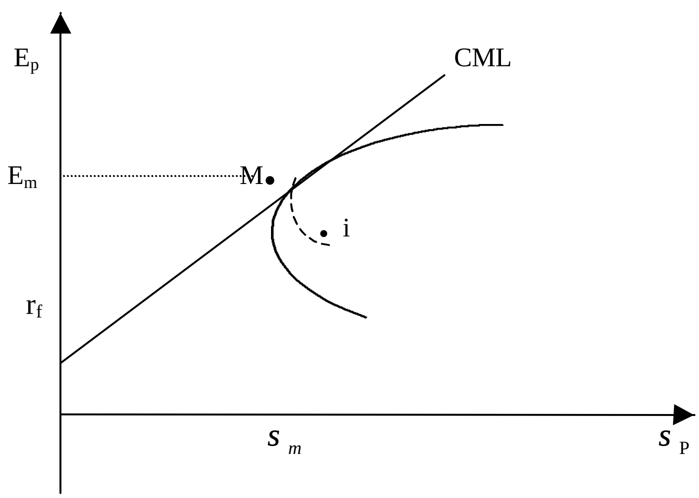
Professeur: **Kodjovi Assoé**

DÉRIVATION DE LA RELATION D'ÉQUILIBRE DU CAPM

Ce document presente le passage de la droite de marché des capitaux (CML ou Capital Market Line) à la droite de marché des titres (SML ou Security Market Line).

Rappel : Lorsque le portefeuille d'actifs risqués est le portefeuille de marché (portefeuille largement diversifié), la droite d'allocation du capital (CAL ou Capital Allocation Line) constitue la droite de marché des capitaux. La droite de marché des capitaux est propre aux portefeuilles efficients (et à certains titres, rares, efficients) et se décrit dans l'espace « rendement espéré, écart type. La droite de marché des titres est propre à tous les titres et portefeuilles, et se décrit dans l'espace « rendement espéré, bêta ». Sur la CML, on ne retrouve que des portefeuilles efficients. Sur la SML, on doit retrouver tous les titres et portefeuilles, efficients ou non-efficients.

Pour établir très simplement la relation du CAPM, imaginons un portefeuille P qui combine le portefeuille de marché M et un titre individuel *i*, titre quelconque que l'on cherche à évaluer (déterminer son rendement espéré). Par définition, cette combinaison ne peut pas être en dehors de l'enveloppe ou de la frontière des portefeuilles efficients.



Au point M, la combinaison de M et de *i* aura une pente égale à celle de la CML. Plus formellement :

$$\left.\frac{dE_p}{d\sigma_p}\right|_{x_i = 0} = \frac{E_m - r_f}{\sigma_m}$$

Où

p désigne le portefeuille qui combine le portefeuille de marché M et le titre *i*,
x_i désigne la proportion de l'actif *i* dans le portefeuille p (x_i=0 signifie que l'on est au point M, i.e. que 100% du portefeuille est investi dans M et 0% dans *i*.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} E_p &= x_i E_i + (1 - x_i) E_m \\ s_p^2 &= x_i^2 s_i^2 + (1 - x_i)^2 s_m^2 + 2x_i (1 - x_i) s_{im} \end{aligned} \qquad (1)$$

La pente de la courbe représentant l'ensemble des combinaisons de M et de *i* peut être exprimée comme suit:

$$\frac{dE_p}{ds_p} = \frac{dE_p / dx_i}{ds_p / dx_i} \qquad (2)$$

De l'équation (1), on a:

$$\frac{dE_p}{dx_i} = E_i - E_m \qquad (3)$$

et

$$\frac{ds_p}{dx_i} = \frac{1}{2}\frac{1}{s_p}\left[2x_i s_i^2 + 2(1 - x_i) s_m^2 + 2s_{im} - 4x_i s_{im}\right]$$

ou encore:

$$\frac{ds_p}{dx_i} = \frac{x_i\left(s_i^2 + s_m^2 - 2s_{im}\right) - s_m^2 + s_{im}}{s_p} \qquad (4)$$

Note: Pour dériver s_p par rapport à x_i, il suffit de reconnaître que

$$s_p = \left[x_i^2 s_i^2 + (1 - x_i)^2 s_m^2 + 2x_i (1 - x_i) s_{im}\right]^{1/2}$$

est de la forme $v(x)=u^{1/2}$ dont la règle de dérivation est $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} u^{-1/2} \frac{du}{dx}$.

Au point M, l'écart type du portefeuille P est égal à celui du portefeuille de marché M, i.e. $s_p = s_m$, et $x_i = 0$. Par conséquent, en remplaçant dans l'équation (4) $s_p = s_m$, et $x_i = 0$, on obtient :

$$\left.\frac{ds_p}{dx_i}\right|_{x_i = 0} = \frac{s_{im} - s_m^2}{s_m} \qquad (5)$$

En remplaçant les expressions (3) et (5) dans (2), on obtient :

$$\frac{dE_p}{d\sigma_p} = \frac{E_i - E_m}{\sigma_{im} - \sigma_m^2}\sigma_m \qquad (6)$$

En égalisant (6) à la pente de la droite de marché des titres (CML), on a:

$$\frac{E_i - E_m}{\sigma_{im} - \sigma_m^2}\sigma_m = \frac{E_i - r_f}{\sigma_m}$$

En isolant E_i , on obtient:

$$E_i = \frac{E_m - r_f}{\sigma_m^2}(\sigma_{im} - \sigma_m^2) + E_m$$

$$E_i = r_f + \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}(E_m - r_f) = r_f + \beta_i (E_m - r_f) \qquad \text{où } \beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \qquad (7)$$

La relation (7) est l'équation de la SML. D'après le CAPM, tous les titres individuels et tous les portefeuilles doivent se conformer à cette relation.

Il est également très facile de dériver la relation de la SML pour les portefeuilles efficients. Rappelons que tous les portefeuilles efficients se retrouvent sur la CML et que tous les portefeuilles qui sont situés sur cette droite sont tous parfaitement et positivement corrélés avec le portefeuille de marché, i.e.
$\rho_{Pm} = +1$.

D'après la relation de la CML, $\mathrm{E_p} = r_f + \frac{(\mathrm{E_p} - r_f)}{\sigma_m}\sigma_{\mathrm{p}}$ pour des portefeuilles efficients P. Cette relation peut être réécrite comme suit :

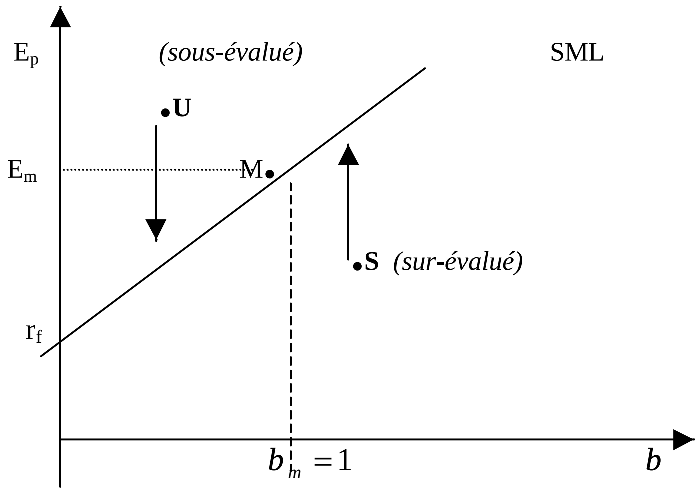
$$\mathrm{E_p} = r_f + \rho_{Pm}\frac{\sigma_{\mathrm{P}}}{\sigma_m}(\mathrm{E_p} - r_f)$$

ou encore

$$\mathrm{E_p} = r_f + \rho_{Pm}\frac{\sigma_{\mathrm{P}}}{\sigma_m}\frac{\sigma_m}{\sigma_m}(\mathrm{E_p} - r_f) = r_f + \frac{\rho_{Pm}\sigma_{\mathrm{P}}\sigma_m}{\sigma_m^2}(\mathrm{E_p} - r_f)$$

$$\mathrm{E_P} = r_f + \frac{\sigma_{\mathrm{P}m}}{\sigma_m^2}(\mathrm{E}_m - r_f) = r_f + \beta_{\mathrm{P}}(\mathrm{E}_m - r_f)$$

Tous les portefeuilles efficients se retrouvent donc sur la SML et sur la CML. Seuls les portefeuilles efficients sont situés sur la CML.



L'équation du SML ou la relation du CAPM s'explique assez intuitivement : Le taux de rendement requis d'un titre ou d'un portefeuille (efficient ou non) est égale au taux de rendement dans risque auquel s'ajoute une prime de risque proportionnelle à la quantité de risque du titre. Le taux de rendement sans risque est la rémunération pour le sacrifice d'une consommation immédiate. C'est la prime du temps. La prime de risque est égale à la quantité de risque que multiplie le prix du risque. La quantité du risque qui est rémunéré par le marché est mesurée par la contribution du titre au risque du portefeuille de marché, i.e., $\sigma_{im} / \sigma_m^2 = \beta_i$. C'est le risque systématique. La prime de risque de marché constitue le prix par unité de risque sur le marché. Avec le risque de marché $\sigma_{mm} / \sigma_m^2 = \beta_m = 1$, le prix du risque ou la prime de risque de marché est la pente de la SML $\left((E_m - r_f)/1\right)$.

Les titres situés au dessus de la SML (par exemple, le titre S sur le graphique ci-dessus) dans l'univers « rendement espéré, bêta » offrent un rendement supérieur à leur rendement dit normal étant donné leur niveau de risque systématique. Ces titres sont donc sous-évalués par le marché (prix faibles par rapport au prix d'équilibre. Dans un marché efficient, la demande de ce titre va augmenter, poussant à la hausse son prix, et ce jusqu'au cours ou prix d'équilibre. À ce niveau le rendement est proportionnel au niveau de risque, tel que stipulé par la relation du CAPM. À l'opposé, les titres situés au dessous de la SML (par exemple, le titre U sur le graphique ci-dessus) offrent un rendement inférieur à leur rendement normal. Ils sont sur-évalués sur le marché. Les investisseurs vont vendre ces titres pour profiter de leur sur-évaluation, entraînant à la baisse leurs prix. À l'équilibre, tous les titres devraient se retrouver sur la SML.