Commentaires :
- Les ROC marquées d'un ☒ font partie des capacités attendues et sont donc exigibles.
- Les ROC marquées $(*)$ sont difficiles.
- Lorsqu'une ROC est accompagnée de questions, il faut se laisser guider par ces questions.
- Lorsqu'une ROC est déjà tombée au bac, ceci est indiqué

I SUITES

ROC 1 ☒ (au programme)

Théorème

> Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang
> - Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
> - Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Prérequis

Soit (u_n) une suite
On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Question

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Solution

Soit I un intervalle de la forme $\left]A\,;\ +\infty\right[$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors, par définition, I contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang n_1. De plus $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_2. Posons $n_0 = \max\left(n_1\,;\,n_2\right)$ alors pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on a $u_n \in I$ c'est à dire $A < u_n$ et $u_n \leq v_n$ donc $A < v_n$. Donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un certain rang n_0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

ROC 2 (au programme)

Théorème

> Si la suite (u_n) est croissante et converge vers un réel L alors, pour tout entier naturel n, $u_n \leq L$.

Prérequis

Soit (u_n) une suite
On dit que la suite (u_n) converge vers un réel L lorsque tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Question

Soit (u_n) une suite croissante qui converge vers un réel L. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq L$.

Solution

On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} > L$. Comme la suite (u_n) est croissante alors, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on a $u_n \geq u_{n_0}$ ce qui est contredit le fait que l'intervalle ouvert $\left]-\infty\,;\ u_{n_0}\right[$ qui contient L, doit contenir tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

ROC 3 (**au programme et vue au bac Liban - Mai 2008 et Polynésie - Juin 2005**)

Théorème

> Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$

Prérequis

Soit (u_n) une suite

On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]A;\ +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Question

Démontrer qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$

Solution

Soit (u_n) une suite croissante non majorée et soit I un intervalle de la forme $]A\ ;\ +\infty[$ avec A réel.

Comme (u_n) n'est pas majorée alors (u_n) n'est pas majorée par A donc il existe un entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} > A$.
Comme la suite (u_n) est croissante alors pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_n \geq u_{n_0}$ donc $u_n > A$.

L'intervalle I contient donc tous les termes de la suite (u_n) à partir du rang n_0. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

ROC 4 (**au programme**)

Théorème (**Inégalité de Bernoulli**)

> Pour tout réel a strictement positif, pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geq 1+na$.

Preuve

Soit a un réel strictement positif. Démontrons par récurrence que la propriété P_n : "$(1+a)^n \geq 1+na$" est vraie pour tout entier naturel n.

Initialisation : $(1+a)^0 = 1$ et $1+0a = 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel quelconque fixé. Supposons que P_n est vraie c'est à dire $(1+a)^n \geq 1+na$ (hypothèse de récurrence).

En multipliant par $1+a > 0$, $(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$ donc en développant, $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2$. Or $na^2 \geq 0$ donc $1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$.

Par conséquent, $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$ donc la propriété P_{n+1} est vraie.

Conclusion : La propriété P_n est vraie au rang 0 et est héréditaire donc elle est vraie pour tout entier naturel n

ROC 5 ⊠ (**au programme**)

Théorème

> La suite (q^n) avec $q > 1$ a pour limite $+\infty$

Prérequis

1) Inégalité de Bernoulli.

2) Théorème de comparaison.

Question

Démontrer que la suite (q^n) avec $q > 1$ a pour limite $+\infty$

Solution

Comme $q > 1$ alors il existe un réel a strictement positif tel que $q = 1+a$.

On a donc, pour tout entier naturel n, $q^n = (1+a)^n$.

D'après l'inégalité de Bernoulli, pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geq 1+na$ donc $q^n \geq 1+na$.

Or, comme $a > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+na) = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

II Probabilités conditionnelles

ROC 1 ☒ (**au programme et vue au bac Centres étrangers - Juin 2009 et Nouvelle Calédonie - Novembre 2005** (**sans préred**

Théorème

> Soient A et B deux évènements d'un même univers Ω et P une probabilité sur Ω.
>
> Si A et B sont indépendants pour la probabilité P alors il en est de même pour $\overline{A}$ et B.

Prérequis

On rappelle que deux évènements A et B sont indépendants pour la probabilité P si et seulement si :
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Question

Soient A et B deux évènements associés à une expérience aléatoire

1) Démontrer que $P(B) = P(B \cap A) + P\left(B \cap \overline{A}\right)$.

2) Démontrer que, si les évènements A et B sont indépendants pour la probabilité P, alors les évènements $\overline{A}$ et B le sont également.

Solution

1) $A \cup \overline{A} = \Omega$ (univers)

Les évènements $B \cap A$ et $B \cap \overline{A}$ sont incompatibles et leur réunion est B donc $P(B) = P(B \cap A) + P\left(B \cap \overline{A}\right)$

2) Soit A et B deux évènement indépendants.

$p\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B) - P(B \cap A) = P(B) - P(B) \times P(A) = P(B)(1 - P(A)) = P(B) \times P\left(\overline{A}\right)$

Donc les évènements $\overline{A}$ et B sont également indépendants.

III Dérivées et primitives

ROC 1 (**vue au bac Métropole - Septembre 2007**)

Question

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$

Démontrer que u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

Solution

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\} \qquad \underbrace{(u^n)' = nu^{n-1}u'}_{\text{Propriété } R_n}$$

Initialisation :

$(u^2)' = (u \times u)' = u \times u' + u' \times u = 2u^{2-1} \times u'$ donc R_2 est vraie.

Hérédité :

Soit $p \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ quelconque fixé, supposons que R_p est vraie, c'est-à dire que $(u^p)' = pu^{p-1}u'$

[Montrons que, sous cette hypothèse, R_{p+1} est vraie, c'est-à dire que $(u^{p+1})' = (p+1)u^p u'$]

En effet : $(u^{p+1})' = (u^p \times u)'$

$= (u^p)' \times u + u^p \times u'$ par dérivée d'un produit

$= pu^{p-1}u' \times u + u^p \times u'$ d'après l'hypothèse de récurrence,

$= pu^p u' + u^p \times u'$

$= (p+1)u^p u'$

Conclusion

La propriété est vraie au rang 2 et héréditaire donc R_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$:

$$\left[\text{On a montré que } \forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\} \qquad (u^n)' = nu^{n-1}u'\right]$$

IV Complexes (partie 1)

ROC 1 (vue au bac Métropole - Juin 2010 et Juin 2014

Prérequis

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels. On note $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - ib$

Questions

1) Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

2) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, et tout nombre complexe z, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$

Solution

1) $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où a, b, a' et b' sont des nombres réels.

D'une part $z \times z' = (a+ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(a'b + ab')$ donc $\overline{z \times z'} = (aa' - bb') - i(a'b + ab')$

D'autre part $\overline{z} \times \overline{z'} = (a - ib)(a' - ib') = (aa' - bb') - i(a'b + ab')$

D'où $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

2) Soit $z \in \mathbb{C}$

Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \underbrace{\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n}_{\text{Propriété } R_n}$$

Initialisation :

$\overline{(a+ib)^1} = a - ib = \left(\overline{a+ib}\right)^1$ donc R_1 est vraie

Hérédité :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé, supposons que R_p est vraie, c'est-à dire que $\overline{z^p} = \left(\overline{z}\right)^p$.

[Montrons que, sous cette hypothèse, R_{p+1} est vraie, c'est-à dire que $\overline{z^{p+1}} = \left(\overline{z}\right)^{p+1}$]

En effet : $\overline{z^{p+1}} = \overline{z^p \times z}$

$= \overline{z^p} \times \overline{z}$ (d'aprés la propriété sur le conjugué d'un produit)

$= \left(\overline{z}\right)^p \times \overline{z}$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

$= \left(\overline{z}\right)^{p+1}$

Conclusion :

La propriété est vraie au rang 1 et héréditaire donc R_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

[On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$]

ROC 2 (vue au bac Centres étrangers - Juin 2007

Questions

1) Démontrer qu'un nombre complexe est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$

2) Démontrer qu'un nombre complexe est réel si et seulement si $\overline{z} = z$

Solution

On pose $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels.

1)

$\overline{z} = -z \iff (a - ib) = -(a + ib)$

$\iff 2a = 0$

$\iff a = 0$

$\iff z$ est imaginaire pur

2)

$$\begin{aligned}\overline{z} = z &\Leftrightarrow (a - ib) = a + ib\\ &\Leftrightarrow 2ib = 0\\ &\Leftrightarrow b = 0\\ &\Leftrightarrow z \text{ est réel}\end{aligned}$$

VII Fonction exponentielle

ROC 1 ☒ $(*)$ (**au programme**)

Théorème

> Il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0.

Questions

On admet l'existence d'une telle fonction. Montrons l'unicité.

1) Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) \times f(-x)$.

a) Montrer que h est une fonction constante. (On déterminera sa valeur)

b) En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

2) Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ égales à leur dérivée et qui vallent 1 en 0. On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = f(-x) \times g(x)$.

a) Montrer que k est une fonction constante. (On déterminera sa valeur)

b) En déduire que f et g sont égales.

c) Conclure

Solution

1)

a) h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$h'(x) = f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x)$

$h'(x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x)$ car $f' = f$

$h'(x) = 0$

Comme, h' est nulle sur $\mathbb{R}$ alors h est constante sur $\mathbb{R}$.

Or $h(0) = f(0) \times f(0) = 1$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = 1$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = 1$ c'est à dire $f(x) \times f(-x) = 1$ donc $f(x) \neq 0$

2)

a) k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$k'(x) = -f'(-x) \times g(x) + f(-x) \times g'(x)$

$k'(x) = -f(-x) \times g(x) + f(-x) \times g(x)$ car $f = f'$ et $g = g'$

$k'(x) = 0$

Comme k' est nulle sur $\mathbb{R}$ alors k est constante sur $\mathbb{R}$.

Or $k(0) = f(0) \times g(0) = 1$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R},\ k(x) = 1$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$:

$k(x) = 1$

$\Leftrightarrow f(-x) \times g(x) = 1$

$\Leftrightarrow f(x) \times f(-x) \times g(x) = f(x)$ (en multipliant par $f(x) \neq 0$)

$\Leftrightarrow g(x) = f(x)$ (car $f(x) \times f(-x) = 1$)

Donc f et g sont égales

c) On a démontré l'unicité d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0.

ROC 2 ☒ (au programme)

Théorème

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Prérequis

1) La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même
2) $e^0 = 1$
3) Théorèmes de comparaison

Questions

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$
1) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$
2) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$
3) En déduire que $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Solution

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables.
$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = e^x - 1$.
$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de		$-$	0	$+$	
variations de		$\searrow$	1	$\nearrow$	

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 1$ donc $e^x \geq x + 1$.
3) Or $\lim_{x \to +\infty} (x + 1) = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

ROC 3 (au programme)

Théorème

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Prérequis (sans $\ln$)

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Question

Montrer que $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Solution

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty \end{array}\right\}$ donc, par limite de composée, $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc, par limite d'inverse, $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

VIII Complexes (partie 2)

ROC 1 (vue au bac Centres étrangers - Juin 2007

Questions

Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$

Solution

On pose $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels.
$z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

ROC 2 (**vue au bac Amérique du Nord - Juin 2006 et Pondichéry - Avril 2012**

Prérequis

Le module d'un nombre complexe z queconque noté $|z|$ vérifie $|z|^2 = z\overline{z}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.

Questions

Démontrer que :

1) Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$

2) Pour tout nombre complexe z non nul, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

Solution

1) Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 :

$|z_1 \times z_2|^2 = z_1 \times z_2 \times \overline{z_1 \times z_2} = z_1 \times z_2 \times \overline{z_1} \times \overline{z_2} = |z_1|^2 \times |z_2|^2$ donc $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$

2) Pour tout nombre complexe z non nul :

$|z| \times \left|\dfrac{1}{z}\right| = \left|z \times \dfrac{1}{z}\right| = |1| = 1$ donc $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

ROC 3 (**vue au bac Asie - Juin 2006 et Liban - Mai 2011**

Prérequis

On sait que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ (2\pi)$

Question

Soient z et z' sont deux nombres complexes non nuls. Démontrer que $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ (2\pi)$

Solution

$\arg(z) = \arg\left(\dfrac{z}{z'} \times z'\right) = \arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) + \arg(z')$ donc $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ (2\pi)$

ROC 4 (**vue au bac Centres étrangers - Juin 2006**

Prérequis

1) Si z est un nombre complexe non nul, on a l'ééquivalence suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} |z| = r \\ \arg(z) = \theta\ (2\pi) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ r > 0 \end{array}\right.$$

2) Pour tous nombres réels a et b :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Question

Soient z et z' sont deux nombres complexes non nuls. Démontrer que $|zz'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ (2\pi)$

Solution

On écrit z et z' sous forme trigonométrique :

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$

où θ désigne un argument de z et θ' un argument de z'.

On a donc : $zz' = |z| \times |z'| \times (\cos\theta + i\sin\theta) \times (\cos\theta' + i\sin\theta')$

$\Leftrightarrow zz' = |z| \times |z'| \times \left[\left(\underbrace{\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'}\right) + i\left(\underbrace{\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta}\right)\right]$

Or $\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' = \cos(\theta+\theta')$ et $\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta = \sin(\theta+\theta')$

On en déduit que $zz' = |z| \times |z'| \times [\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')]$

On reconnaît la forme trigonométrique de zz' avec :

d'une part : $|zz'| = |z| \times |z'|$

d'autre part : $\arg(zz') = \theta + \theta'\ (2\pi)$ c'est à dire $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ (2\pi)$

ROC 5 (**vue au bac La Réunion - Juin 2010**

Question

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

Soient A,B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b et c.

On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C.

On rappelle que $mes\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right) = \arg(b-a)\ (2\pi)$

Démontrer que $mes\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\ (2\pi)$

Solution

$\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a)\ (2\pi)$ (d'après la propriété sur l'argument d'un quotient)

$= mes\left(\vec{u},\overrightarrow{AC}\right) - mes\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)\ (2\pi)$

$= mes\left(\vec{u},\overrightarrow{AC}\right) + mes\left(\overrightarrow{AB},\vec{u}\right)\ (2\pi)$

$= mes\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\ (2\pi)$ (d'après la relation de Chasles sur les angles orientés de vecteurs)

ROC 6 (**vue au bac Amérique du Sud - Novembre 2006**

Question

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

On rappelle que pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul d'affixe z on a $|z| = \left\|\vec{w}\right\|$.

Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$.

Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$

Solution

$\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right| = \dfrac{|p-m|}{|n-m|}$ (d'après la propriété sur le module d'un quotient)

$= \dfrac{\left\|\overrightarrow{MP}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|}$

$= \dfrac{MP}{MN}$

IX Intégration

ROC 1 $(*)$ (**au programme**)

Théorème

> Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ (avec $a \leq b$)
>
> La fonction F définie sur $[a\ ;\ b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a\ ;\ b]$
>
> et sa dérivée est f.

Preuve dans le cas où f est croissante et positive.

Prérequis

Soit F et f deux fonctions définies sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et $x_0 \in [a\ ;\ b]$

$F'(x_0) = f(x_0)$ signifie que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$

Question

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $\left[a\,;\,b\right]$. Soit F la fonction définie sur $\left[a\,;\,b\right]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

On veut montrer que la fonction F est dérivable sur $\left[a\,;\,b\right]$ et a pour dérivée f.

Soit $x_0 \in \left[a\,;\,b\right]$.

1) Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $\left[a\,;\,b\right]$ avec $x \neq x_0$, on a $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x-x_0}$

2)

a) On suppose $x > x_0$. Montrer que $f(x_0) \leq \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \leq f(x)$

On admet que si $x < x_0$ alors $f(x) \leq \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \leq f(x_0)$

b) Déterminer la limite de $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0

3) Conclure.

Solution

1) Pour $x \neq x_0$:

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{x-x_0}$$

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_{x_0}^{a} f(t)dt}{x-x_0}$$

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{\int_{x_0}^a f(t)dt + \int_{a}^{x} f(t)dt}{x-x_0}$$

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x-x_0} \quad \text{d'après la relation de Chasles}$$

2)

a) Supposons que $x_0 < x$

f est croissante sur I donc :

$$\forall t \in [x_0,x], \qquad f(x_0) \leq f(t) \leq f(x) \qquad \text{d'après l'inégalité de la moyenne}$$

$$\forall t \in [x_0,x], \qquad (x-x_0)f(x_0) \leq \int_{x_0}^x f(t)dt \leq (x-x_0)f(x) \qquad \text{or} \qquad x-x_0 > 0$$

$$\forall t \in [x_0,x], \qquad f(x_0) \leq \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x-x_0} \leq f(x) \qquad \text{d'après la question 1}$$

$$\forall t \in [x_0,x], \qquad f(x_0) \leq \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \leq f(x)$$

b) On admet que si $x < x_0$ alors $f(x) \leq \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \leq f(x_0)$

Comme f est continue en x_0 alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$$

c) On a donc démontré que

$$\forall x_0 \in \left[a\,;\,b\right] \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0) \qquad \text{c'est à dire que}$$

$$\forall x_0 \in \left[a\,;\,b\right] \qquad F'(x_0) = f(x_0)$$

Donc F est dérivable sur $\left[a\,;\,b\right]$ et a pour dérivée f.

ROC 2 $(*)$ (**au programme**)

Théorème

> Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives

Preuve dans le cas où l'intervalle est fermé borné.

Prérequis

1) Si f est une fonction continue et positive $[a\ ;\ b]$, la fonction F définie sur $[a\ ;\ b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a\ ;\ b]$ et a pour dérivée f.

2) Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a\ ;\ b]$ admet un minimum.

Question

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a\ ;\ b]$. Montrer que f a des primitives sur $[a\ ;\ b]$.

Solution

Comme f est continue sur un intervalle fermé borné $[a\ ;\ b]$ alors f admet un minimum m sur $[a\ ;\ b]$.
On considère la fonction g définie sur $[a\ ;\ b]$ par $g(x) = f(x) - m$.

Comme la fonction g est continue et positive sur $[a\ ;\ b]$ alors la fonction G définie sur $[a\ ;\ b]$ par $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ est dérivable sur $[a\ ;\ b]$ et a pour dérivée g.
Alors la fonction F définie sur $[a\ ;\ b]$ par $F(x) = G(x) + mx$ ($m \in \mathbb{R}$) est dérivable sur $[a\ ;\ b]$ et
$F'(x) = G'(x) + m = g(x) + m = f(x)$.
Donc F est une primitive de f.
Donc la fonction f a bien des primitives sur $[a\ ;\ b]$. (Toutes les fonctions de la forme $F + k$ avec $k \in \mathbb{R}$)

ROC 3 (**au programme**)

Théorème

> Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ (avec $a \leq b$)
> et F une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$ alors
> $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Prérequis

Si f est une fonction continue et positive $[a\ ;\ b]$, la fonction G définie sur $[a\ ;\ b]$ par $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a\ ;\ b]$ et a pour dérivée f.

Question

Soit f une fonction continue et positive sur $[a\ ;\ b]$ et F une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$. Montrer que
$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Solution

F et G sont deux primitives de f sur $[a\ ;\ b]$ donc, il existe un réel k tel que, pour tout réel x de $[a\ ;\ b]$, on a
$F(x) = G(x) + k = \int_a^x f(t)dt + k$.

On a alors $F(b) - F(a) = \left(\int_a^b f(t)dt + k\right) - \left(\int_a^a f(t)dt + k\right) = \int_a^b f(t)dt$.

ROC 4 (**vue au bac Pondichéry - Avril 2010**, **Amérique N - Juin 2009**, **Polynésie - Juin 2008 et Antilles Guyane - Juin 2007**)

Prérequis

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $\left[a\,;\,b\right]$

- Si $f \geq 0$ sur $\left[a\,;\,b\right]$ alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$
- Pour tous réels α et β, $\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$

Question

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $\left[a\,;\,b\right]$ (avec $a < b$) et si pour tout $t \in [a;b]$, $f(t) \leq g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

Solution

Pour tout $t \in \left[a\,;\,b\right]$, $f(t) \leq g(t)$ donc $g(t) - f(t) \geq 0$.

De plus la fonction $(g - f)$ est continue sur l'intervalle $\left[a\,;\,b\right]$ alors, d'après le pré-requis (positivité de l'intégrale), $\int_a^b [g(t) - f(t)]dt \geq 0$.

Or, d'après le pré-requis (linéarité de l'intégrale), $\int_a^b [g(t) - f(t)]dt = \int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)dt$.

On en déduit donc $\int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)dt \geq 0$ donc $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

X Lois à densité

ROC 1 (**au programme et vue au bac Métropole - Juin 2008 et Pondichéry - Avril 2014**)

Théorème

> Soit T une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.
> Alors $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall h \in \mathbb{R}^+$, $P_{(T \geq t)}(T \geq t + h) = p(T \geq h)$

Prérequis

Soit T une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ ¸ où λ est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout $t \geq 0$, $P(T \leq t) = \int\limits_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$

Questions

Soit la fonction R définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $R(t) = P(T \geq t)$

1) Démontrer que pour tout $t \geq 0$ on a $R(t) = e^{-\lambda t}$.

2) Démontrer que la variable T suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tous réels t et h positifs, $P_{(T \geq t)}(T \geq t + h) = P(T \geq h)$

Solution

1) $R(t) = P(T \geq t) = 1 - P(T < t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - \int\limits_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx = 1 - [-e^{-\lambda x}]_0^t = 1 - (-e^{-\lambda t} - 1) = e^{-\lambda t}$

2) Pour tous réels t et h positifs,

$$P_{(T \geq t)}(T \geq t + h) = \frac{P((T \geq t) \cap (T \geq t + h))}{P(T \geq t)} = \frac{P(T \geq t + h)}{P(T \geq t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(T \geq h)$$

ROC 2 ☒ (**au programme**)

Théorème

> L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif est $\frac{1}{\lambda}$

Prérequis

L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle est définie par $E(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt$.

Questions

1) Montrer que la fonction F définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(t) = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$ est une primitive sur $[0\ ;\ +\infty[$ de la fonction f définie par $f(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$

2) Montrer que l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif est $\frac{1}{\lambda}$

Solution

1) F est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables.

$F'(t) = -e^{-\lambda t} + \lambda\left(t + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t} = f(t)$ donc F est une primitive de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2) Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

$E(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt.$

Or $\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} = \left[-\left(t + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}\right]_0^x = \frac{1}{\lambda} - \left(x + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda} + \frac{-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x}}{\lambda}$.

On a $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (-\lambda x) = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} X e^X = 0 \text{ (par croissance comparée)} \end{array}\right\}$ donc, par limite de composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} (-\lambda x e^{-\lambda x}) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$

donc, par limite de somme et de quotient, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

XI Logarithme népérien

ROC 1 (vue au bac Antilles Guyane - Septembre 2010

Prérequis (avec $\exp$)

1) $\exp$ et $\ln$ sont des fonctions réciproques l'une de l'autre

2) La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$

3) Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$

Question

Montrer que pour tout $x \in\ ]0\ ;\ +\infty[$, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Solution

$\forall x \in\ ]0\ ;\ +\infty[,\ e^{\ln(x)} = x$

En dérivant chaque membre de l'égalité, on a $\forall x \in\ ]0\ ;\ +\infty[,\ \ln'(x)e^{\ln(x)} = 1$ c'est à dire $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ (car $x \neq 0$)

ROC 2 (vue au bac Antilles Guyane Juin 2006

Prérequis (sans $\exp$)

1) La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sa fonction dérivée est la fonction inverse $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$

2) $\ln(1) = 0$

3) Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. Alors $\ln u$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

Question

Montrer que pour tous réels strictement positifs a et x, $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$

Solution

Soit a un réel strictement positif quelconque fixé. On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(ax) - \ln(x)$

f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme composée et somme de fonctions dérivables.

$\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[\;:\; f'(x) = \dfrac{a}{ax} - \dfrac{1}{x} = 0$

Donc f est une fonction constante sur $\left]0\,;\,+\infty\right[$

Or $f(1) = \ln(a) - \ln(1) = \ln(a)$ donc $\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[$, $f(x) = \ln(a)$ c'est à dire $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$.

ROC 3 (vue au bac Antilles Guyane Juin 2006 et La Réunion - Juin 2007

Prérequis

Pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

Questions

Montrer que pour tous réels strictement positifs a et b et pour tout entier relatif n :

1) $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$

2) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

3) $\ln(a^n) = n\ln(a)$

4) $\ln(\sqrt{a}\,) = \dfrac{1}{2}\ln a$

Solution

1) $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) + \ln(b) = \ln\left(\dfrac{1}{b} \times b\right) = \ln(1) = 0$ donc $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$

2) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

3) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$: $\underbrace{\ln(a^n) = n\ln(a)}_{\text{Propriété } R_n}$

Initialisation :

$\ln(a^0) = \ln(1) = 0$ et $0\ln a = 0$

Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons que R_p est vraie c'est à dire que $\ln(a^p) = p\ln(a)$ (hypothèse de récurrence). Démontrons que, sous cette hypothèse R_{p+1} est vraie c'est à dire que $\ln(a^{p+1}) = (p+1)\ln(a)$.

En effet : $\ln(a^{p+1}) = \ln(a^p \times a) = \ln(a^p) + \ln(a) = p\ln(a) + \ln(a) = (p+1)\ln(a)$

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si n est un entier strictement négatif :

$\ln(a^n) = \ln\left(\dfrac{1}{a^{-n}}\right) = -\ln(a^{-n}) = -(-n)\ln(a) = n\ln(a)$

4) $\ln(a) = \ln\left((\sqrt{a}\,)^2\right) = 2\ln(\sqrt{a}\,)$ donc $\ln(\sqrt{a}\,) = \dfrac{1}{2}\ln a$

ROC 4 (vue au bac Amérique du Sud - Novembre 2008

Prérequis (sans exp)

1) On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0\;;\;+\infty[$, positive sur $[1\;;\;+\infty[$, et vérifie :

- $\ln 1 = 0$
- pour tous réels strictement positifs x et y, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $\ln(2) \approx 0{,}69$ à 10^{-2} près

2) Théorème des gendarmes

Questions

On considère la fonction f définie sur $]0\;;\;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.

1) Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0\;;\;+\infty[$.

2) En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

3) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Solution

1) f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ car somme de fonctions dérivables .

$\forall x \in]0\ ;\ +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$

Or $\left(x > 0 \text{ et } \sqrt{x} - 2 \geq 0\right) \Leftrightarrow x \geq 4$

D'où le tableau de variation :

x	0 $\quad$ 4 $\quad$ $+\infty$
signe de $f'(x)$	$\|$ $\quad -$ $\quad 0$ $\quad +$
variation de f	$\|$ $\searrow$ $\quad 2-2\ln 2$ $\quad \nearrow$

Donc f a pour minimum $2-2\ln 2$ sur $]0\ ;\ +\infty[$

2) Or $2-2\ln 2 \simeq 0,6$ donc d'après le tableau de variation de f : $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[,\ f(x) > 0$ c'est à dire $\ln x < \sqrt{x}$.

$\forall x > 1,\ 0 < \ln x < \sqrt{x}$ donc, en divisant par $x > 0$, on a $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

3) $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+$

ROC 5 (**vue au bac Centres Etrangers - Juin 2008**, **Asie - Juin 2007 - Amérique du Nord - Mai 2012**)

Prérequis (avec exp)

1) exp et ln sont des fonctions réciproques l'une de l'autre $\qquad$ **2**) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Question

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

Solution

$\forall x \in \left]0\ ;\ +\infty\right[$, on a $\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{\ln(x)}{e^{\ln(x)}}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty\end{array}\right\}$$
donc, par limite de composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\ln(x)}}{\ln(x)} = +\infty$ donc, par limite d'inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

XII Géométrie dans l'espace

ROC 1 $(*)$ (**au programme**)

Théorème du toit

> Lorsqu'un plan P_1 contenant une droite (d_1) est sécant à un plan P_2 contenant une droite (d_2) parallèle à (d_1) alors la droite d'intersection (Δ) de ces deux plans est parallèle à (d_1) et à (d_2)

Preuve

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de (d_1) et (d_2) et $\vec{w}$ un vecteur directeur de (Δ)

Soit $\left(\vec{u}\ ,\ \vec{v_1}\right)$ un couple de vecteurs directeurs du plan P_1. Comme la droite (Δ) est incluse dans P_1 alors les vecteurs $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v_1}$ sont coplanaires donc il existe un couple de réels $\left(x_1\ ;\ y_1\right)$ tels que $\vec{w} = x_1\vec{u} + y_1\vec{v_1}$.

Soit $\left(\vec{u}\ ,\ \vec{v_2}\right)$ un couple de vecteurs directeurs du plan P_2. Comme la droite (Δ) est incluse dans P_2 alors les vecteurs $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v_2}$ sont coplanaires donc il existe un couple de réels $\left(x_2\ ;\ y_2\right)$ tels que $\vec{w} = x_2\vec{u} + y_2\vec{v_2}$.

On a donc $x_1\vec{u} + y_1\vec{v_1} = x_2\vec{u} + y_2\vec{v_2}$ soit $(x_1 - x_2)\vec{u} = -y_1\vec{v_1} + y_2\vec{v_2}$

Supposons que $x_1 - x_2 \neq 0$ alors $\vec{u} = -\dfrac{y_1}{x_1 - x_2}\vec{v_1} + \dfrac{y_2}{x_1 - x_2}\vec{v_2}$ donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont coplanaires ce qui est impossible car les plans P_1 et P_2 sont sécants.

Donc $x_1 - x_2 = 0$ donc $y_1\vec{v_1} = y_2\vec{v_2}$

Supposons que $y_1 \neq 0$ alors $\vec{v_1} = \dfrac{y_2}{y_1}\vec{v_2}$ donc les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont colinéaires ce qui est impossible car les plans P_1 et P_2 sont sécants.

Donc $y_1 = 0$. On en conclut que $\vec{w} = x_1\vec{u}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires donc la droite (Δ) est parallèle à (d_1) et à (d_2)

XIII Loi normale

ROC 1 ⊠ $(*)$ (au programme - vue au bac Nouvelle Calédonie - mars 2014)

Théorème

> Si X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathrm{N}(0,1)$ alors
> pour tout réel $\alpha \in \left]0\,;\,1\right[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1-\alpha$

Questions

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$H(x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = \int_{-x}^{x} f(t)dt.$$

1) Que représente la fonction f pour la loi normale centrée réduite ?
2) Préciser $H(0)$ et la limite de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3) A l'aide de considérations graphiques, montrer que pour tout nombre réel positif x, $H(x) = 2\int_0^x f(t)dt$.
4) En déduire que la dérivée H' de la fonction H sur $[0\,;\,+\infty[$ est la fonction $2f$ et dresser le tableau de variations de H sur $[0\,;\,+\infty[$.
5) Démontrer alors le théorème énoncé.

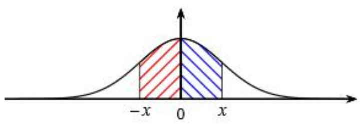
Solution

1) f est la densité de probabilité de la loi normale $\mathrm{N}(0,1)$

2) $H(0) = \int_0^0 f(u)du = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)dt$ qui correspond à l'aire (en unités d'aire) du domaine situé entre la courbe et l'axe des abscisses. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = \lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(u)du = 1$ (c'est la probabilité d'un évènement certain).

3) D'après la relation de Chasles, $\forall x \geq 0$, $H(x) = \int_{-x}^{x} f(t)dt = \int_{-x}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt$.
Pour tout réel $x \geq 0$, f est continue et positive sur $[-x,0]$ $\big($avec $-x \leq 0\big)$ et sur $[0,x]$
donc $\int_{-x}^{0} f(t)dt$ et $\int_0^x f(t)dt$ sont les aires des domaines hachurées sur la figure ci-dessous.



De plus la fonction f est paire donc ces deux aires sont égales.
Donc $H(x) = \int_{-x}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = 2\int_0^x f(t)dt$

4) Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$ alors, d'après le cours, la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ donc H est une primitive de $2f$ sur $\mathbb{R}_+$ donc H est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $H'(x) = 2f(x)$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) > 0$ donc $H'(x) > 0$ donc H est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
D'après les résultats de la question 1), nous obtenons alors le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
Variations de H	0 ↗	1

5) Sur $\mathbb{R}_+$, H est continue (car dérivable) et strictement croissante à valeurs sur $[0,1[$. Or pour tout réel α tel que $\alpha \in]0;1[$, le réel $1-\alpha \in \left]0\,;\,1\right[$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel positif u_α tel que $G(u_\alpha) = 1-\alpha$, c'est-à-dire $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = \alpha$.

ROC 2 (**au programme**)

Théorème

> L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ est $E(X) = 0$

Prérequis

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Sa densité de probabilité f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Son espérance $E(X)$ est définie par $E(X) = \lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^0 tf(t)dt + \lim\limits_{y \to +\infty} \int_0^y tf(t)dt$

Questions

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
On note f sa densité de probabilité et $E(X)$ son espérance.

1) Pour tout réel y, déterminer $\int_0^y tf(t)dt$.

2) En déduire $\lim\limits_{y \to +\infty} \int_0^y tf(t)dt$ puis que $E(X) = 0$.

Solution

1) Pour tout réel y, $\int_0^y tf(t)dt = \int_0^y \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} te^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^y tf(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y te^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - e^{-\frac{y^2}{2}} \right)$$

2) Par conséquent, $\lim\limits_{y \to +\infty} \int_0^y tf(t)dt = \lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - e^{-\frac{y^2}{2}} \right)$. Or $\lim\limits_{y \to +\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} = 0$, donc $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - e^{-\frac{y^2}{2}} \right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

De même, $\int_x^0 tf(t)dt = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 \right)$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^0 tf(t)dt = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

De plus, $E(X) = \lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^0 tf(t)dt + \lim\limits_{y \to +\infty} \int_0^y tf(t)dt$. Donc $E(X) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} - \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0$

XIV Produit scalaire

ROC 1 ☒ (**au programme et vue au bac Nouvelle Calédonie - Mars 2007**)

Question

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Etablir une équation cartésienne d'un plan P dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}\left(a, b, c\right)$ et un point $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$

Solution

$$\begin{aligned} M\left(x, y, z\right) \in P &\iff \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ &\iff ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0 \end{aligned}$$

Donc P a pour équation cartésienne $ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$

ROC 2 ☒ (∗) (**au programme et vue au bac Antilles Guyane - septembre 2013**)

Théorème

> Une droite est orthogonale à toute droite du plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan

Preuve

Si une droite est orthogonale à toute droite du plan, elle est en particulier orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
Réciproquement, soit une droite Δ est orthogonale à deux droites sécantes D_1 et D_2 du plan P.
Notons $\vec{u}$, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ les vecteurs directeurs respectifs des droites Δ, D_1 et D_2.
Comme la droite Δ est orthogonale à D_1 et D_2 alors $\vec{u} \cdot \vec{v_1} = \vec{u} \cdot \vec{v_2} = 0$.
Comme les droites D_1 et D_2 sont sécantes alors les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont non colinéaires.
Soit D une droite du plan P de vecteur directeur $\vec{w}$ alors il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{v_1} + b\vec{v_2}$.
Donc $\vec{u} \cdot \vec{w} = a\vec{u} \cdot \vec{v_1} + b\vec{u} \cdot \vec{v_2} = 0$ donc les droites Δ et D sont orthogonales.
Donc Δ est orthogonale à toutes les droites du plan.

ROC 3 (**vue au bac Métropole - Septembre 2011**)

Question

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,,\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\right)$

On désigne par a, b, c, d quatre réels tels que le vecteur $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ soit différent du vecteur nul.
On appelle P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.
Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P, c'est-à-dire que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points quelconques du plan P.

Solution

Soient A et B deux points quelconques du plan P.
Notons $\left(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A\right)$ et $\left(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B\right)$ les coordonnées respectives des points A et B.
$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) + c(z_B - z_A) = (ax_B + by_B + cz_B) - (ax_A + by_A + cz_A)$.
Or A et B sont deux points du plan P donc $ax_B + by_B + cz_B = -d$ et $ax_A + by_A + cz_A = -d$
Donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -d + d = 0$
Donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ donc le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P.

XVI Intervalle de fluctuation et estimation

ROC 1 ☒ (∗) (**au programme**)

Théorème

> n est un entier naturel non nul et p est un réel de l'intervalle $\left]0\,;\,1\right[$.
>
> X_n est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.
>
> F_n est la variable aléatoire définie par $F_n = \dfrac{X_n}{n}$
>
> Pour tout réel α de l'intervalle $\left]0\,;\,1\right[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$ où
>
> I_n désigne l'intervalle $\left[\, p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,\right]$
>
> I_n est donc un intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F_n au seuil de $1 - \alpha$

Prérequis

1) Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}\left(0\,;\,1\right)$. Alors, pour tout α dans $]0;1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \le Z \le u_\alpha) = 1 - \alpha$.
2) Théorème de Moivre-Laplace : Soit X_n une variabe aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p et Z_n la

variable aléatoire définie par $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Alors, pour tous nombres réels a et b tels que $a < b$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} P(a \le Z_n \le b) = P(a \le Z \le b)$ où Z suit la loi normale centrée réduite.

Question

Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

1) Soit la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(-u_\alpha \le Z_n \le u_\alpha)$, où u_α désigne l'unique réel tel que $P(-u_\alpha \le Z \le u_\alpha) = 1-\alpha$.

2) Déterminer deux réels a et b (dépendant de p, u_α et n) tels que $P(-u_\alpha \le Z_n \le u_\alpha) = P\left(a \le \dfrac{X_n}{n} \le b\right)$.

3) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha$ où I_n désigne l'intervalle $\left[p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \;;\; p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

Solution

1) Soit la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

D'après le théorème de Moivre-Laplace $\lim\limits_{n\to+\infty} P(-u_\alpha \le Z_n \le u_\alpha) = P(-u_\alpha \le Z \le u_\alpha) = 1-\alpha$.

2) $P(-u_\alpha \le Z_n \le u_\alpha) = P\left(-u_\alpha \le \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le u_\alpha\right) = P\left(-u_\alpha\sqrt{p(1-p)} \le \dfrac{X_n - np}{\sqrt{n}} \le u_\alpha\sqrt{p(1-p)}\right)$

$P(-u_\alpha \le Z_n \le u_\alpha) = P\left(-u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \le \dfrac{X_n - np}{n} \le u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)$

$P(-u_\alpha \le Z_n \le u_\alpha) = P\left(p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \le \dfrac{X_n}{n} \le p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{X_n}{n} \in I_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P\left(p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \le \dfrac{X_n}{n} \le p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = P(-u_\alpha \le Z_n \le u_\alpha) = 1-\alpha$.

ROC 2 $(*)$ (au programme)

Théorème

> n est un entier naturel non nul et p est un réel de l'intervalle $]0\;;\;1[$.
>
> X_n est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p. $(p \in\,]0\;;\;1[)$
>
> F_n est la variable aléatoire définie par $F_n = \dfrac{X_n}{n}$
>
> Il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel $n \ge n_0$, $P(F_n \in J_n) \ge 0{,}95$
>
> où J_n désigne l'intervalle $J_n = \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \;;\; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$

Prérequis

1) Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathrm{N}(0\;;\;1)$. Alors, pour tout α dans $]0;1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \le Z \le u_\alpha) = 1-\alpha$.

2) Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

Pour tout réel α de l'intervalle $]0\;;\;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha$ où I_n désigne l'intervalle $\left[p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \;;\; p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

3) Définition de la limite finie en l'infini d'une suite.

Questions

Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p et $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.

1) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(p - 2\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \le F_n \le p + 2\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \ge 0{,}9544$

2) Montrer que, pour tout réel $p \in\,]0\;;\;1[$, $\sqrt{p(1-p)} \le \dfrac{1}{2}$

3) En déduire que $\left[p - \frac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; p + \frac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \subset \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$

4) Déduire des questions 2) et 4) que $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \geq 0,95$

Solution

1) En prenant $u_\alpha = 2$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right) = P(-2 \leq Z \leq 2)$

D'après la calculatrice $P(-2 \leq Z \leq 2) \geq 0,9544$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right) \geq 0,9544$

2) On considère la fonction *f* définie sur $\left]0 \; ; \; 1\right[$ par $f(p) = \sqrt{p(1-p)}$.
$p \mapsto p(1-p)$ est dérivable et strictement positive sur $\left]0 \; ; \; 1\right[$ donc *f* est dérivable sur $\left]0 \; ; \; 1\right[$ comme composée de fonctions dérivables.
$\forall p \in \left]0 \; ; \; 1\right[, \; f'(p) = \frac{-2p+1}{2\sqrt{p(1-p)}}$
$\forall p \in \left]0 \; ; \; 1\right[, \; 2\sqrt{p(1-p)} > 0$ donc $f'(p)$ est du signe de $-2p+1$.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
signe de $f'(p)$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$
variations de *f*	$\|$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\|$

$\forall p \in \left]0 \; ; \; 1\right[, \; \sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2}$

3) On en déduit alors que $\frac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ et par conséquent,
$\left[p - \frac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; p + \frac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \subset \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

4) D'après la question 4), $\left[p - \frac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; p + \frac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \subset \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$. Donc
$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \geq P\left(p - \frac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right)$.
D'après la question 1), $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right) \geq 0,9544$. Par définition de la limite d'une suite, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$:
$P\left(p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right) \in \left]0,95 \; ; \; +\infty\right[$. Donc, pour tout $n \geq n_0$,
$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \geq 0,95$

ROC 3 (vue au bac Antilles Guyane - Juin 2013)

Questions

Soient n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et 1, et X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On note $F_n = \frac{X_n}{n}$ et *f* une valeur prise par F_n. On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ contient la fréquence *f* avec une probabilité au moins égale à $0,95$.

En déduire que l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à $0,95$.

Solution

$f \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] (*)$

$(*) \Leftrightarrow p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq f$ et $f \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}$

$(*) \Leftrightarrow p \leq f + \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $f - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p$

$(*) \Leftrightarrow p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$

Donc $P\left(p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \right) = P\left(f \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \right)$.

Or $P\left(f \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \right) \geq 0,95$ donc $P\left(p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \right) \geq 0,95$