

Lois à densité

Exercice 1 (loi uniforme) :

Un sèche-linge est muni d'une sonde qui permet de déterminer le temps nécessaire pour sécher la charge de linge.

Émilie met son linge à sécher sans en connaître la charge. On admet que la durée suit la loi uniforme sur l'intervalle $[30 ; 150]$.

1. Déterminer la probabilité que le temps de séchage de la charge de linge soit compris entre 45 minutes et 60 minutes.
2. Emilie met son linge à sécher à 11h. Calculer la probabilité qu'il soit sec avant 12h.
3. Sachant que le sèche linge fonctionne déjà depuis 1 heure, quelle est la probabilité que le temps total de séchage soit inférieur à 2 heures?
4. Calculer l'espérance de X. Interpréter ce résultat.

Lois à densité

Soit f définie sur un intervalle I . f est une densité de probabilité si elle vérifie :

- f est continue et positive sur I
- $\int_I f(x) dx = 1$

Si X suit la loi de probabilité de densité f alors :

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Les inégalités strictes ou larges n'ont pas d'influence sur le résultat.

L'espérance de X est $E(x) = \int_I x f(x) dx$

Exercice 2 (loi à densité) :

La production quotidienne X d'un produit en tonnes est une variable aléatoire continue qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0 ; 10]$ avec la densité de probabilité f définie par $f(x) = 0,06x - 0,006x^2$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité sur $[0 ; 10]$.
2. a) Calculer les probabilités des événements suivants :
 - A : « La production est inférieure à 7 tonnes »
 - B : « La production dépasse 6 tonnes »b) Calculer $P_B(A)$.
3. Calculer l'espérance de cette loi et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 (loi à densité) :

g est la fonction définie sur $[0 ; +\infty [$ par $g(x) = 2xe^{-x^2}$.

1. Pour tout nombre positif a , on pose : $I(a) = \int_0^a g(x) \, dx$

Calculer $I(a)$ en fonction de a et déterminer $\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a)$.

2. Démontrer que g est une densité de probabilité.

3. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de densité g .

a) Calculer $p(X \leq 2)$, $p(X \geq 1)$ et $p(1 \leq X \leq 3)$

b) Déterminer le nombre réel m tel que $p(X \leq m) = 0,5$.