Géométrie dans l'espace et ... : Correction

▷ **Exercice 1.** [7 points]

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On considère les points A(2 ; −1 ; 0), B(0 ; 3 ; −4), C(4 ; 1 ; 1) et S(−2 ; 1 ; 4).

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent bien un plan.

2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AS}$ est normal au plan (ABC).

On a $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix}$. De plus, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AS} = -2\times(-4)+4\times 2+(-4)\times 4 = 0$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AS} = 2\times(-4)+2\times 2+1\times 4 = 0$ donc $\overrightarrow{AS}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (ABC). Ainsi $\overrightarrow{AS}$ est normal au plan (ABC).

3. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

$\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc une équation cartésienne de (ABC) est de la forme $-4x+2y+4z+d=0$.

De plus A(2 ; −1 ; 0) $\in$ (ABC) $\iff -4\times 2+2\times(-1)+4\times 0+d=0 \iff d=10$

d'où (ABC) : $-4x+2y+4z+10=0$

4. Soit (d) la droite passant par D(8 ; −5 ; 0) et orthogonale au plan (ABC). Expliquer pourquoi $\overrightarrow{AS}$ est un vecteur directeur de (d) et en déduire une représentation paramétrique de (d).

(d) est orthogonale au plan (ABC) donc elle est parallèle à la droite (AS) qui est également orthogonale à (ABC) donc $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) dont une représentation paramétrique est alors :

$$\begin{cases} x = x_D - 4t \\ y = y_D + 2t \\ z = z_D + 4t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 8-4t \\ y = -5+2t \\ z = 4t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$$

5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (d) et du plan (ABC).

Un point M(x ; y ; z) appartient à (ABC) et à (d) s'il existe un réel t tel que :

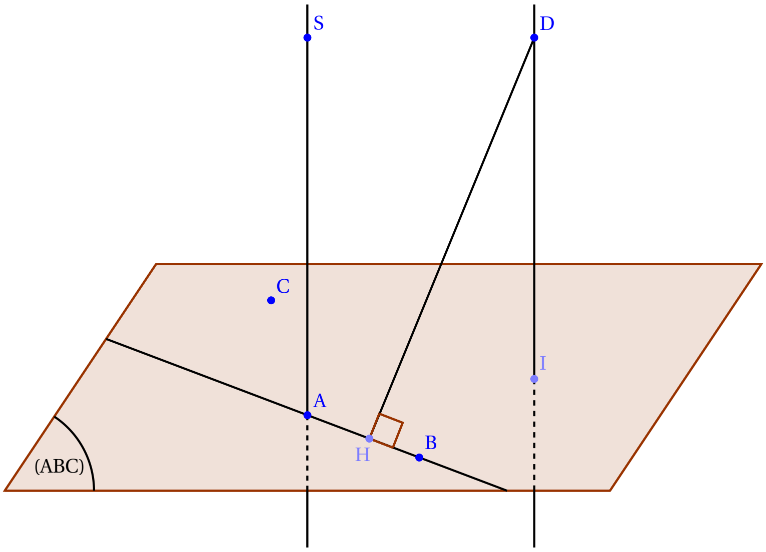
$$\begin{cases} x = 8-4t \\ y = -5+2t \\ z = 4t \\ -4x+2y+4z+10=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 8-4t \\ y = -5+2t \\ z = 4t \\ -4(8-4t)+2(-5+2t)+4(4t)+10=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 8-4t \\ y = -5+2t \\ z = 4t \\ t=\frac{8}{9} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{40}{9} \\ y = -\frac{29}{9} \\ z = \frac{32}{9} \\ t=\frac{8}{9} \end{cases}$$

donc I$\left(\dfrac{40}{9} ; -\dfrac{29}{9} ; \dfrac{32}{9}\right)$.

6. Calculer la distance de D au plan (ABC).

La distance de D au plan (ABC) est la distance $\text{DI} = \sqrt{(x_\text{I} - x_\text{D})^2 + (y_\text{I} - y_\text{D})^2 + (z_\text{I} - z_\text{D})^2} = \ldots = \dfrac{16}{3}$.

7. On note H le projeté orthogonal de D sur la droite (AB) et t le nombre réel tel que $\overrightarrow{\text{AH}} = t\overrightarrow{\text{AB}}$.



a) Montrer que $\overrightarrow{\text{AD}}.\overrightarrow{\text{AB}} = t\left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\|^2$

$\overrightarrow{\text{AD}}.\overrightarrow{\text{AB}} = \overrightarrow{\text{AH}}.\overrightarrow{\text{AB}} = t\overrightarrow{\text{AB}}.\overrightarrow{\text{AB}} = t\left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\|^2$

b) En déduire la valeur de t puis les coordonnées de H.

On a $\overrightarrow{\text{AD}}\begin{pmatrix}6\\-4\\0\end{pmatrix}$ et$\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{AD}}.\overrightarrow{\text{AB}} = -12-16 = -28$. Par ailleurs $\left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\|^2 = (-2)^2+4^2+(-4)^2 = 36$

d'où $t = \dfrac{-28}{36} = -\dfrac{7}{9}$.

Ainsi $\overrightarrow{\text{AH}} = t\overrightarrow{\text{AB}} = -\dfrac{7}{9}\overrightarrow{\text{AB}}$ d'où $\begin{cases} x_\text{H} - x_\text{A} = -\frac{7}{9}\times(-2) \\ y_\text{H} - y_\text{A} = -\frac{7}{9}\times 4 \\ z_\text{H} - z_\text{A} = -\frac{7}{9}\times(-4) \end{cases} \iff \begin{cases} x_\text{H} - 2 = \frac{14}{9} \\ y_\text{H} + 1 = -\frac{28}{9} \\ z_\text{H} = \frac{28}{9} \end{cases} \iff \begin{cases} x_\text{H} = \frac{32}{9} \\ y_\text{H} = -\frac{37}{9} \\ z_\text{H} = \frac{28}{9} \end{cases}$

D'où $\text{H}\left(\dfrac{32}{9}\,;\,-\dfrac{37}{9}\,;\,\dfrac{28}{9}\right)$

▷ **Exercice 2.** [4 points]

Pour chaque question, une affirmation est proposée. indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère :

- Les points A(0 ; 1 ; 4), B(1 ; 1 ; 6), C(−2 ; 3 ; 2), D(3 ; −3 ; 1) et E(−4 ; 7 ; −3)
- La droite Δ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -2+3t \\ y = 1 \\ z = 6t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation A : A appartient à la droite (d) : $\begin{cases} x = -3+2t \\ y = 5-3t \\ z = 1+t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

A(0 ; 1 ; 4) donc cherchons s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} -3+2t=0 \\ 5-3t=1 \\ 1+t=4 \end{cases} \iff \begin{cases} t=\frac{3}{2} \\ t=\frac{4}{3} \\ t=3 \end{cases}$ donc le système est impossible d'où $A \notin (d)$ et l'affirmation est fausse.

Affirmation B : Une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x+y-z+3=0$.
Les coordonnées des points A et B et C vérifient bien l'équation du plan. Donc cette affirmation est vraie.

Affirmation C : (DE) et (ABC) ont au moins un point commun.
Une représentation paramétrique de la droite (DE) passant par D(3 ; −3 ; 1) et de vecteur directeur $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$ est : $\begin{cases} x=3-7t \\ y=-3+10t \\ z=1-4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
Un point M(x ; y ; z) appartient à (DE) et à (ABC) si et seulement si il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} x=3-7t \\ y=-3+10t \\ z=1-4t \\ 2x+y-z+3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3-7t \\ y=-3+10t \\ z=1-4t \\ 2(3-7t)+(-3+10t)-(1-4t)+3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3-7t \\ y=-3+10t \\ z=1-4t \\ 5=0 \end{cases}.$$

Le système est donc impossible.
L'affirmation est fausse.
On pouvait aussi remarquer que le vecteur $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$ et que $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui est un vecteur normal à (ABC) sont orthogonaux et donc que la droite (DE) était parallèle au plan (ABC).
En justifiant que $D \notin (ABC)$ on prouvait que (DE) était strictement parallèle à (ABC).

Affirmation D : (Δ) et (AB) sont sécantes.
Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Une représentation paramétrique de la droite (Δ) est $\begin{cases} x=-2+3t' \\ y=1 \\ z=6t' \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$ donc un vecteur directeur de (Δ) est $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

On remarque que $\vec{u}=3\overrightarrow{AB}$ et donc que les droites (AB) et (Δ) sont parallèles. On pourrait vérifier qu'elles sont en réalité confondues.

▷ **Exercice 3.** [3 points]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations respectives :
$\mathscr{P} : x+2y-5z+1=0$ et $\mathscr{P}' : 2x+3y+2z-8=0$.

1. Montrer que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants.

Un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathscr{P}'$ est $\vec{n'}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles. Ils sont donc sécants.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) , intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

Un point M(x ; y ; z) appartient simultanément à $\mathscr{P}$ et à $\mathscr{P}'$ si ses cordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x+2y-5z+1=0 \\ 2x+3y+2z-8=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y=-1+5z \\ 2x+3y=8-2z \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2y-1+5z \\ -4y-2+10z+3y=8-2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=-2(-10+12z)-1+5z \\ y=-10+12z \end{cases} \iff \begin{cases} x=19-19z \\ y=-10+12z \end{cases}$$ donc en posant $z=t$ on obtient :

$\begin{cases} x=19-19t \\ y=-10+12t \\ z=t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ qui est une représentation paramétrique de la droite (d), intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

▷ **Exercice 4.** [7 points]

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

PARTIE A

En 2010, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égale à 1000. Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de 2010). D'après le modèle choisi, la fonction f est définie sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ par $f(t)=\mathrm{e}^{3-3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}}=\exp\left(3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{20}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\mathrm{e}^X=+\infty$ par théorème donc par composition, $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}=+\infty$ d'où $\lim\limits_{t\to+\infty}3-3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}=-\infty$.

On sait que $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X=0$ donc par composition, $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$.

2. Déterminer le sens de variation de f sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

f est dérivable comme composée de fonction dérivable.

$f=\mathrm{e}^u$ donc $f'=u'\mathrm{e}^u$ avec $u(t)=3-3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}$ et $u'(t)=-3\times\dfrac{1}{20}\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}$ donc $f'(t)=-\dfrac{3}{20}\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\mathrm{e}^{3-3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}}$

or $\forall\, x\in[\,0\,;\,+\infty\,[$, $e^x>0$ donc $f'(t)<0$ ainsi f est strictement décroissante sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$

En remarquant que $f(0)=\ldots=1$, on complète le tableau de variations de f :

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(t)$	$-$
f	$1 \searrow 0$

3. Résoudre dans $[\,0\,;\,+\infty\,[$ l'inéquation $f(t)<0,02$.

Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

$$\begin{aligned} f(t) < 0,02 &\iff \mathrm{e}^{3-3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}} < 0,02 \\ &\iff \ln\left(\mathrm{e}^{3-3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}}\right) < \ln(0,02) \\ &\iff 3-3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} < \ln(0,02) \\ &\iff \mathrm{e}^{\frac{t}{20}} > \frac{3-\ln(0,02)}{3} \\ &\iff \frac{t}{20} > \ln\left(\frac{3-\ln(0,02)}{3}\right) \\ &\iff t > 20\ln\left(\frac{3-\ln(0,02)}{3}\right) \approx 16,69 \end{aligned}$$

donc à partir de la $17^{\text{ème}}$ année la taille de l'échantillon sera inférieure à 20 individus.

PARTIE B

En 2013, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50% d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99% des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 10% des cas. »

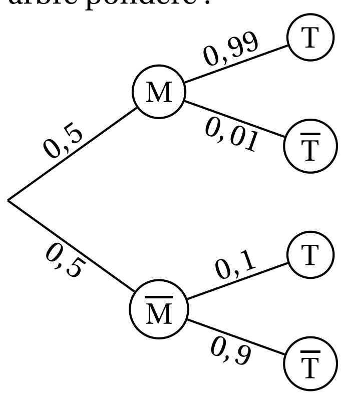
On note M l'événement « l'animal est malade », $\overline{\mathrm{M}}$ l'événement contraire de M et T l'événement « le test est positif »

1. Sans calcul, donner $\mathrm{P(M)}$, $\mathrm{P_M(T)}$ et $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{T})$.

$\mathrm{P(M)} = 0,5$, $\mathrm{P_M(T)} = 0,99$ et $\mathrm{P_M(T)} = 0,1$

2. Montrer que $\mathrm{P(T)} = 0,545$.

On peut résumer la situation par un arbre pondéré :



M et $\overline{\mathrm{M}}$ constituent une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathrm{P(T)} &= \mathrm{P(M \cap T)} + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{M}} \cap \mathrm{T}\right) \\ &= \mathrm{P(M)} \times \mathrm{P_M(T)} + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{M}}\right) \times \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{T}) \\ &= 0,5 \times 0,99 + 0,5 \times 0,1 \\ &= 0,545 \end{aligned}$$

3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable si sa valeur prédictive, c'est à dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable ?

$\mathrm{P_T(M)} = \dfrac{\mathrm{P(M \cap T)}}{\mathrm{P(T)}} = \dfrac{0,5 \times 0,99}{0,545} \approx 0,908 < 0,999$ donc ce test n'est pas fiable.

4. Le laboratoire teste dix animaux. On suppose que les résultats de ces tests sont indépendants. Les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

a) Calculer la probabilité que, sur les dix animaux testés, exactement trois soient testés positifs.

On répète dix fois, dans des conditions identiques et indépendantes, la même épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,545$. La variable aléatoire qui donne le nombre de succès suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(10\ ;\ 0,545)$.

Ainsi, $P(x=3) = \binom{10}{3} 0,545^3 \times (1-0,545)^7 \approx 0,0784$

b) Calculer la probabilité qu'au moins un des dix animaux soit testé positif.

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - (1-0,545)^{10} \approx 0,9996$

c) Quelle est l'espérance du nombre d'animaux testés positifs ?

$E(X) = np = 5,45$

▷ **Exercice 5.** [5 points]

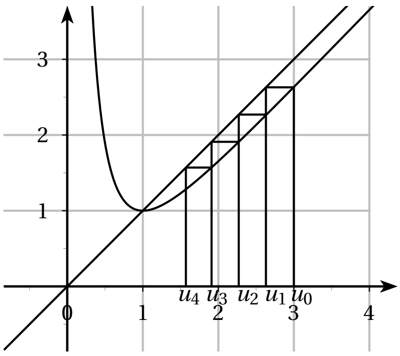
Soit f la fonction définie sur $]\,0\ ;\ +\infty\,[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. Sur l'intervalle $[\,1\ ;\ \mathrm{e}\,]$, f est continue et d est située au dessus de $\mathscr{C}_f$ donc l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est donnée, en unités d'aire, par $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (x - f(x))\,\mathrm{d}x$

$x - f(x) = \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{x} \times \ln x$ de la forme $u'u$ dont une primitive est $\dfrac{1}{2}u^2$ donc l'aire du domaine est $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (x - f(x))\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$ unités d'aire.

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 3$.

a) Sur la graphique ci-dessus, en utilisant $\mathscr{C}_f$ et d, construire sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4. (on laissera apparents les traits de construction)



b) Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la limite de la suite (u_n) ?

Conjectures : (u_n) est décroissante et admet pour limite 1.

c) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

- **Initialisation :** $u_0 = 3 \geq 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :** On suppose la propriété vraie pour un entier n quelconque, c'est à dire $u_n > geq1$, et on démontrer qu'elle est vraie au rang $n+1$.
  Comme f est croissante sur $[\,1\ ;\ +\infty\,[$, $u_n \geq 1$ implique $f(u_n) \geq f(1)$ soit $u_{n+1} \geq 1$ donc la propriété est héréditaire.
- **Conclusion :** La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc elle est vraie pour tout entier naturel n.
  Ainsi $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

d) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n - \dfrac{\ln u_n}{u_n} - u_n = -\dfrac{\ln u_n}{u_n}$.

Or $u_n \geq 1$ et on a démontré plus haut, que pour tout $x \in [\,1\,;\,+\infty\,[$, $-\dfrac{\ln x}{x} \leq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
Ainsi (u_n) est décroissante.

e) En déduire que (u_n) est convergente.

(u_n) est décroissante et minorée par 1 donc d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.

f) On note $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et on admet que ℓ est un réel strictement positif vérifiant l'égalité $\ell = f(\ell)$.
Déterminer ℓ.

$\ell = f(\ell) \Longleftrightarrow \ell = \ell - \dfrac{\ln \ell}{\ell} \Longleftrightarrow -\dfrac{\ln \ell}{\ell} = 0 \Longleftrightarrow \ln \ell = 0 \Longleftrightarrow \ell = 1$

Ainsi (u_n) converge vers 1.