Équations de droites : correction des exercices 9 à 12

▷ **Exercice 9.** On donne les points A(5 ; −2), B(11 ; 0) et C(−1 ; 6).

1. On note I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC]. Déterminer l'équation réduite de la droite (CI) puis celle de la droite (BJ).

Droite (CI) **:**

- On sait que $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)\left(\dfrac{5+11}{2}\,;\,\dfrac{-2+0}{2}\right)$ soit I(8 ; −1).
- La droite (CI) a pour coefficient directeur $m=\dfrac{y_I-y_C}{x_I-x_C}=\dfrac{-1-6}{8-(-1)}=-\dfrac{7}{9}$.

  On a donc (CI) : $y=-\dfrac{7}{9}x+p$. C(−1 ; 6) ∈ [CI] $\iff -\dfrac{7}{9}\times(-1)+p=6 \iff p=6-\dfrac{7}{9}=\dfrac{47}{9}$

  Ainsi (CI) : $y=-\dfrac{7}{9}x+\dfrac{47}{9}$

Droite (BJ) **:** En utilisant la même méthode, on obtient :

- J(2 ; 2)
- (BJ) : $y=-\dfrac{2}{9}x+\dfrac{22}{9}$

2. En déduire les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC.

Les droites (CI) et (BJ) passent chacune par un sommet du triangle ABC et par le milieu du côté opposé à ce sommet, ce sont donc des médianes de ce triangle. Dans un triangle, les trois médianes son concourantes et se coupent au centre de gravité, c'est à dire au point d'intersection de (CI) et (BJ).

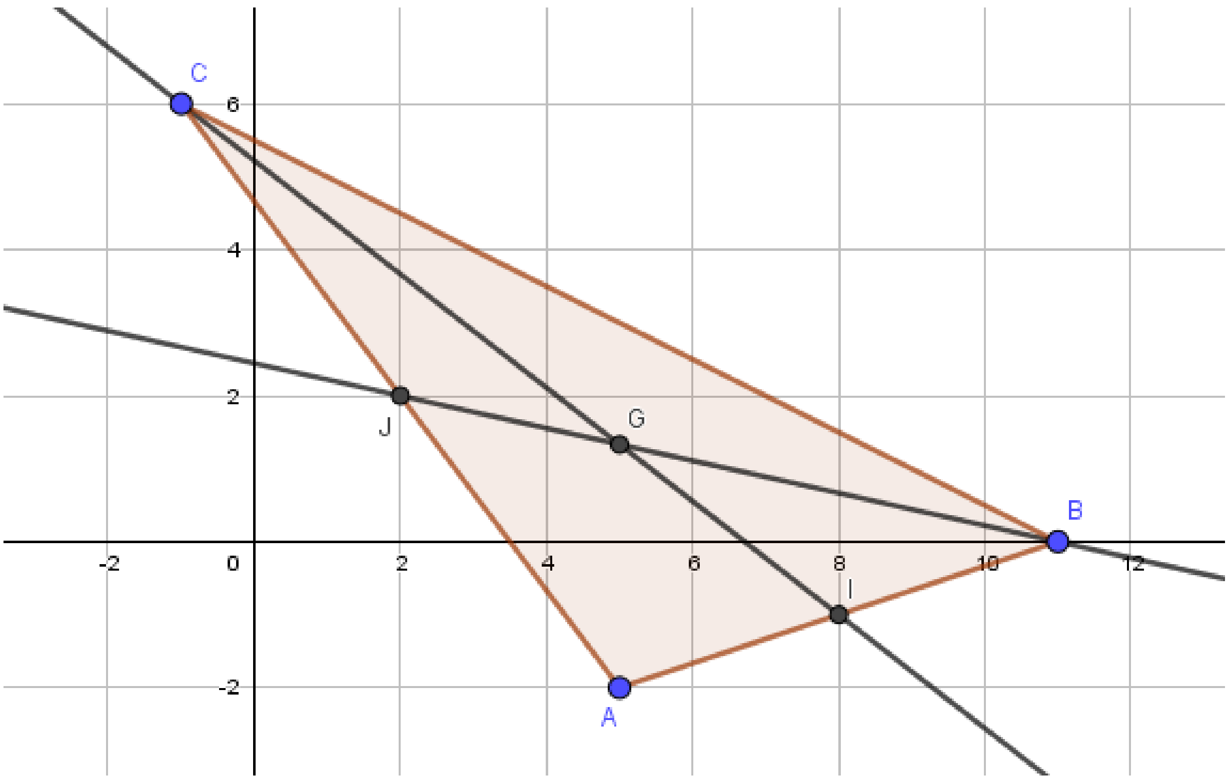
Les coordonnées du centre de gravité G vérifient donc : $\begin{cases} y=-\frac{7}{9}x+\frac{47}{9} \\ y=-\frac{2}{9}x+\frac{22}{9}\end{cases}$ d'où :

$$\begin{aligned}
-\frac{7}{9}x+\frac{47}{9}&=-\frac{2}{9}x+\frac{22}{9}\\
-\frac{7}{9}x+\frac{2}{9}x&=\frac{22}{9}-\frac{47}{9}\\
-\frac{5}{9}x&=-\frac{25}{9}\\
x&=\frac{9}{5}\times\frac{25}{9}\\
x&=5
\end{aligned}$$

En remplaçant dans la 1ère équation par exemple, on obtient :

$y=-\dfrac{7}{9}\times5+\dfrac{47}{9}=\dfrac{4}{3}$.

Ainsi $G\left(5\,;\,\dfrac{4}{3}\right)$ est le centre de gravité du triangle ABC.



▷ **Exercice 10.** Soit $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère du plan.

1. On considère la droite (d) passant par A(4 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

a) Le point B(2 ; −1) est-il un point de la droite (d) ?

B est un point de (d) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Ce qui n'est pas le pas car $xy' - x'y = -2\times(-1) - 2\times(-2) = 4 \neq 0$ donc $B \notin (d)$

b) Déterminer une équation de la droite (d).

Soit M(x ; y) un point du plan.

$$\begin{aligned} M(x\,;\,y) \in (d) &\Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-4\\y-1\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\ &\Longleftrightarrow -1(x-4) - 2(y-1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow -x+4-2y+2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow -x-2y+6 = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (d) est donc $(d) : -x-2y+6=0$ et son équation réduite est $(d) : y = -\frac{1}{2}x+3$

2. Soit (Δ) la droite passant par les points $E\left(\frac{3}{4}\,;\,0\right)$ et $F\left(6\,;\,\frac{7}{2}\right)$.

a) Déterminer une équation de la droite (Δ).

On trouve $(\Delta) : y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$ ou encore

b) Les droites (d) et (Δ) sont-elles parallèles ?

(d) et (Δ) n'ont pas le même coefficient directeur donc elles ne sont pas parallèles.

3. Résoudre le système $\begin{cases} x+2y=6 \\ 4x-6y=3 \end{cases}$. Interpréter graphiquement le résultat.

$$\begin{cases} x+2y=6 \\ 4x-6y=3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=6-2y \\ 4(6-2y)-6y=3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=6-2y \\ 24-8y-6y=3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=6-2y \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=6-2\times\frac{3}{2}=3 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$$

On remarque par ailleurs que $x+2y=6 \Longleftrightarrow -x-2y=-6 \Longleftrightarrow -x-2y+6=0$ et on retrouve l'équation de (d).

De plus, $4x-6y=3 \Longleftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$ qui l'équation de (Δ).

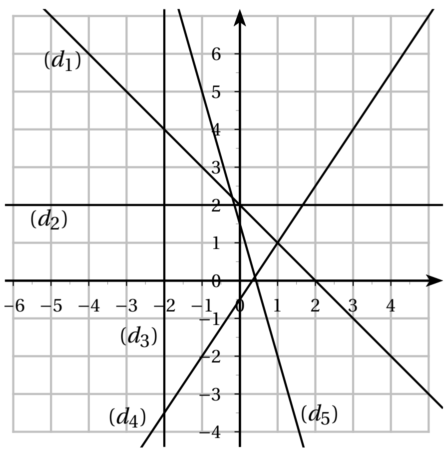
En conclusion, (d) et (Δ) se coupent au point de coordonnées $\left(3\,;\,\frac{3}{2}\right)$

▷ **Exercice 11.** Donner l'équation réduite de chacune des droites représentée sur le graphique ci-contre.

$(d_1) : y = -x+2$; $(d_2) : y = 2$; $(d_3) : x = -2$;

$(d_4) : y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$; $(d_5) : y = -\frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$

Graphique de l'exercice 11



▷ **Exercice 12.** Soit $(d_1) : y = 2x - 5$ et $(d_2) : y = -3x + 1$.

1. Construire les droites (d_1) et (d_2).

- $(d_1) : y = 2x - 5$;

x	0	2
y	-5	-1

- $(d_2) : y = -3x + 1$;

x	0	2
y	1	-5

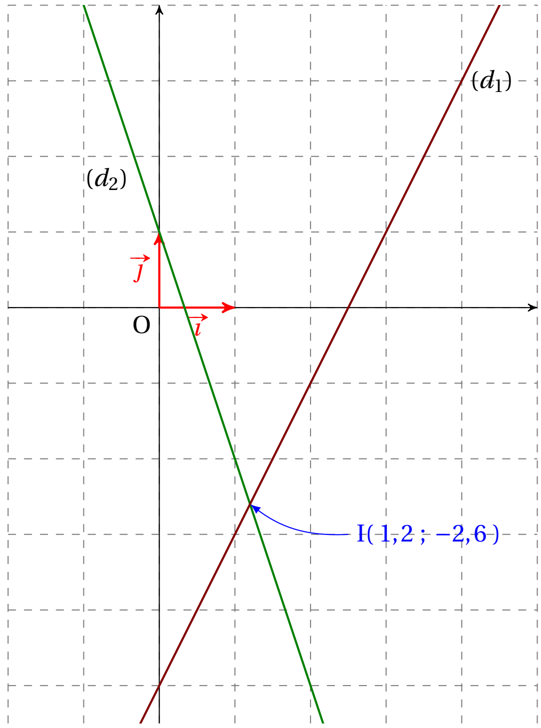
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (d_1) et (d_2).

Les droites (d_1) et (d_2) n'ont pas le même coefficient directeur donc elles sont sécantes.

Les cordonnées de leur point d'intersection I sont solutions du système :

$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -3x + 1 \end{cases} \Longrightarrow 2x - 5 = -3x + 1 \Longleftrightarrow 5x = 6 \Longleftrightarrow x = \dfrac{6}{5} =$
$1{,}2$ d'où $y = 2 \times 1{,}2 - 5 = -2{,}6$

ainsi $\mathrm{I}(\,1{,}2\,;\,-2{,}6\,)$.



▷ **Exercice 13.** On donne les points $\mathrm{A}(\,1\,;\,1\,)$, $\mathrm{B}(\,-1\,;\,-2\,)$ et $\mathrm{C}(\,3\,;\,0\,)$.

1. Faire un graphique.

2. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

$(\mathrm{AB}) : y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$

3. Tracer sur le graphique la droite (d_1) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$.

x	1	-1
y	-1	-2
Point	$\mathrm{E}(\,1\,;\,-1\,)$	$\mathrm{F}(\,-1\,;\,-2\,)$

4. Prouver que $\mathrm{C} \in (d_1)$.

Pour $x = 3$, $y = \dfrac{1}{2} \times 3 - \dfrac{3}{2} = 0$ donc $\mathrm{C}(\,3\,;\,0\,) \in (d_1)$

5. Déterminer l'équation de la droite (d_2), parallèle à (AB) qui passe par C.

(d_2) et (AB) sont parallèles donc elles ont le même coefficient directeur, d'où $(d_2) : y = \dfrac{3}{2}x + p$ et $\mathrm{C}(\,3\,;\,0\,) \in (d_2) \Longleftrightarrow$ $\dfrac{3}{2} \times 3 + p = 0 \Longleftrightarrow p = -\dfrac{9}{2}$. Donc $(d_2) : y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{9}{2}$.

6. Soit (d_3) la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$. Prouver que $\mathrm{A} \in (d_3)$ et que (d_3) est parallèle à (d_1).

Pour $x = 1$, $y = \dfrac{1}{2} \times 1 + \dfrac{1}{2} = 1$ donc $\mathrm{A}(\,1\,;\,1\,) \in (d_3)$. De plus, (d_1) et (d_3) ont le même coefficient directeur donc elles sont parallèles.

7. Déterminer les coordonnées du point d'intersection D des droites (d_3) et (d_2).

Les coordonnées du point d'intersection de (d_3) et (d_2) vérifient le système $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} \Longleftrightarrow$ $x = 5$ d'où $y = \dfrac{1}{2} \times 5 + \dfrac{1}{2} = 3$ donc (d_3) et (d_2) se coupent en $\mathrm{D}(\,5\,;\,3\,)$.

8. Par construction, ABCD est un parallélogramme