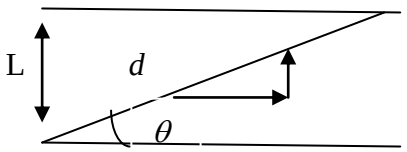
Corrigé des travaux dirigés (2016)

Corrigé 1

La trajectoire est une ellipse de centre O située dans le plan vertical yOz.
Composantes de la vitesse : $(0, -b\omega sin\omega t, c\omega cos\omega t)$
Composantes de l'accélération : $(0, -b\omega^2 cos\omega t, -c\omega^2 sin\omega t)$
Cas particulier : b = c. La trajectoire est le cercle de rayon b. Le mouvement est circulaire uniforme de pulsation ω.
Propriétés : La vitesse qui est tangente à la trajectoire, est perpendiculaire au rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ (vérifier que le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\vec{V} = 0$). L'accélération est normale : portée par $\overrightarrow{OM}$ et orientée vers le centre O (à vérifier aussi)

Corrigé 2

La vitesse absolue de la barque (par rapport à la côte) est $\vec{v} + \vec{V}$. Son module est donc : $\sqrt{1^2 + 0{,}5^2} = 1{,}12$.
La direction du trajet est la diagonale des deux vecteurs vitesse. Elle fait l'angle θ avec la côte tel que :
$tg\theta = \frac{v}{V} = 0{,}5$. Et la distance parcourue est donc : $d = \frac{L}{sin\theta} = 111{,}8\ m.$ La durée du trajet :
$T = \frac{118{,}2}{1{,}12} \sim 100\ s.$



Corrigé 3

Équations vectorielles (loi de Newton)
$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$; $\vec{P} = m\vec{g}$
Coordonnées polaires $\rho = OM = l$ = Cte et l'ange θ. Axes du repère $\vec{u}_\rho\ et\ \vec{u}_\theta$
Rappel, en coordonnées polaires :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d[\dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta]}{dt} \qquad \vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$$

La loi de Newton s'écrit donc en utilisant les axes $\vec{u}_\rho\ et\ \vec{u}_\theta$:

$$\vec{P} + \vec{T} = m\left(-l\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho + l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta\right) \text{ avec } \vec{T} = -T\vec{u}_\rho\ et\ \vec{P} = mg(cos\theta\vec{u}_\rho - sin\theta\vec{u}_\theta)$$

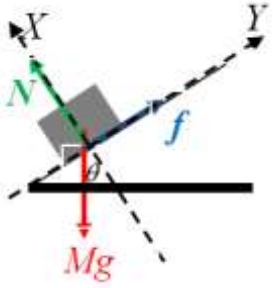
D'où les deux équations : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0\ \ et\ T = mg(cos\theta - l\dot{\theta}^2)$

Pour les petits mouvements : θ petit donc : $sin\theta \sim 0$ et $cos\theta \sim 1$, il reste : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0.$

La solution de cette équation différentielle est : $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)\ \ avec\ \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

C'est un mouvement périodique (oscillatoire) de pulsation ω et de période $T = 2\pi/\omega$
θ_0 et ϕ sont déterminées par les conditions initiales. $\theta(0) = \theta_0 cos\varphi\ et\ \dot{\theta}_0 = \theta_0 sin\varphi$
En utilisant le théorème du moment cinétique :
$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{P} + \vec{T})$ avec $\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{mV} = ml\vec{u}_\rho \wedge l\dot{\theta}\vec{u}_\theta = ml^2\dot{\theta}\vec{u}_z$ d'où $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\vec{u}_z$
$\overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{P} + \vec{T}\right) = l\vec{u}_\rho \wedge \left(-T\vec{u}_\rho + mgcos\theta\vec{u}_\rho - mgsin\theta\vec{u}_\theta\right) = -lmgsin\theta\vec{u}_z)$
On retrouve le résultat précédent.

Corrigé 4



Les forces : Le poids $\vec{P}$, la force de frottement $\vec{f}$ (opposée au glissement de la boite donc dirigée vers le haut du plan incliné), et la réaction normale $\vec{N}$ (perpendiculaire au plan).
On écrit la condition d'équilibre, relation entre vecteurs : $\boldsymbol{\vec{P} + \vec{f} + \vec{N} = \vec{0}}$.
On projette ensuite sur les deux axes (X, Y) :
Sur X : $f - Mgsin\theta = 0$
Sur Y : $N - Mgcos\theta = 0$
Ces deux relations donnent : $\frac{f}{N} = tg\theta$, Mais par définition du coefficient de frottement : $\mu = tg\alpha = \frac{f}{N}$,
D'où la relation cherchée $tg\theta = tg\alpha \rightarrow \boldsymbol{\alpha = \theta}$

Corrigé 5

1. $T = \left(27 + \frac{1}{3}\right).24.3600 = 2361600\ s.$
2. Le mouvement est circulaire uniforme, $a_t = 0$; $a_n = \omega^2 R$;
   Loi de l'attraction et de Newton : $M_L\omega^2 R = G\frac{M_L M_T}{R^2}$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$; $R^3 = G\frac{M_T}{\omega^2}$; $R = 382\ 065\ km$
   La valeur admise réellement est distance Terre-Lune = 384 400 km

Corrigé 6

$$g(r) = G\frac{M_T}{r^2} = g_0\frac{R^2}{r^2}\ ; V(r) = \omega r = \frac{2\pi}{T}r\ ; P = mg(r) = m\omega^2 r \rightarrow T = 2\pi\frac{r}{R}\sqrt{\frac{r}{g_0}}$$

Ce qui donne : $v^2 = \frac{GM_T}{r} = \frac{g_0 R^2}{r}$ et $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg_0\frac{R^2}{r}$; $E_p = -mg_0\frac{R^2}{r} = -2\ E_c$; $E_m = \frac{1}{2}E_p = -E_c$

Pour l'orbite géostationnaire, la période du satellite est égale à la période de rotation propre de la terre (le satellite observe toujours le même endroit sur terre) : T = 23,93419 heures = 86163,084 s. Avec $g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$.
On trouve : *h=35 784 km ;* hauteur par rapport à la surface de la terre. Vitesse : *v = 3047 m/s=10 969 km/h*

Corrigé 7

Le mercure monte, donc la pression dans le gaz est supérieure à la pression atmosphérique.
$h = 47 - 15 = 32\ cm = 0{,}32\ m.\ et\ P_g = P_{atm} + \rho_{Hg}gh$=143,65. 10^3 Pa

$$n = \frac{PV}{RT}\ ; V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 5{,}24.10^{-4}m^3\ et\ donc\ n = 0{,}0307\ mole$$

Corrigé 8

1. Le volume ajouté en une heure est

$$V = \pi R^2 h = 100{,}48\ m^3\ d'où\ Q_v = \frac{100{,}48}{3600} = 0{,}0279\ m^3 s^{-1} = 27{,}9\ l.s^{-1}$$

2. En 1 s le volume vidé est : $1{,}2.\pi\ (0{,}03)^2$=3,4.10^{-3} m^3/s =3,4 *l/s*
3. On écrit la conservation de la masse : débits entrants=débits sortants, ce qui donne : D_4=-20 cm^3/s entrant.

Corrigé 9

$P_B = P_0 + \rho h' g = P_C + \rho_{Hg}(h' - h)g\ ; P_C = P_0 + \rho_{eau}gh\ ;\ (P_A = P_D = P_0)$;
Ce qui donne : $\rho = \rho_{eau}\frac{h}{h'} + \rho_{Hg}\left(1 - \frac{h}{h'}\right) = 10450\ kg/m^3$ et la densité *:* $d = \frac{10450}{1000} = 10,45$

Corrigé 10

Le liquide est incompressible : donc le volume du liquide déplacé à gauche est égal au volume du liquide déplacé à droite : $\pi R^2 H = \pi r^2 h$. Ce qui donne <u>*h = 4,5 cm*</u>. On applique ensuite que la Loi Fondamentale de l'Hydrostatique (LFH) entre les points B et A du fluide :
$P_B = P_C = P_A + \rho g(H + h)$ Mais le liquide supporte en B la pression de l'atmosphère et la pression due au poids de la masse M : $P_B = P_0 + \frac{Mg}{S}$; $S = \pi R^2$ La surface en A est à l'air libre donc : P_A=P_0.
De ces équations, on tire : $M = \pi R^2\rho(H + h) = 1{,}13\ kg$

Corrigé 11

1) On applique la LFH entre Q et M (vitesses négligeables) : $P_M = P_Q + \rho g h_0 = 102\ kPa.$ Le théorème de Bernoulli entre M et N : $\frac{1}{2}\rho V_M^2 + \rho g Z_M + P_M = \frac{1}{2}\rho V_N^2 + \rho g Z_N + P_N$ avec
$Z_N = 0;\ V_M = 0;\ Z_M = h\ ;\ P_N = P_0$ Ce qui donne : $V_N = \sqrt{2g(h + h_0)} = 4{,}64\ m.s^{-1}$
2) $Q_v = sV_N = \sqrt{2g(h + h_0)}$
3) Appliquons le théorème de Bernoulli entre M et N avec l'aiguille placée en N dans la veine du malade :
$\frac{1}{2}\rho V_M^2 + \rho g Z_M + P_M = \frac{1}{2}\rho V'^2_N + \rho g Z_N + P'_N$ avec $Z_N = 0;\ V_M = 0;\ Z_M = h\ ;\ P'_N = \frac{3}{4}P_0$ Ce qui donne :
$V'_N = \sqrt{\frac{P_0}{2\rho} + 2g(h + h_0)} = 8{,}5\ m.s^{-1}$. Le volume du liquide perfusé : $v = Q_v.t = s'.V'_N.3600 = 15{,}2\ l.$ Ce volume est trop grand car on n »a pas tenu compte de la viscosité qui ralentit la vitesse donc diminue le volume.
4) Ici, on applique la formule de Poiseuille qui tient compte de la viscosité :

$$Q'_v = \frac{\pi R^4}{8\mu h}(P_M - P'_N) = \frac{s'^2}{8\pi\mu h}\left(\frac{P_0}{4} + \rho g h_0\right)$$

Application numérique : $v' = Q'_v.t = 0{,}23\ l.$ C'est proche du volume perfusé normalement : ¼ litre.