# Lois normales : exercices 1 à 8

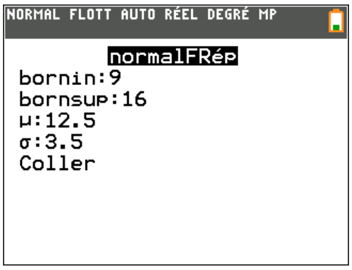
▷ **Exercice 1.** À l'issue des épreuves du baccalauréat, une étude est faite sur les notes obtenues par les candidats en mathématiques et en français.

On admet que la note de mathématiques peut être modélisée par une variable aléatoire $X_M$ qui suit la loi normale de moyenne 12,5 et d'écart-type 3,5.

De même la note de français peut être modélisée par une variable aléatoire $X_F$ qui suit la loi normale de moyenne 13,2 et d'écart-type 2,1.

**1.** Déterminer $P(9 \leqslant X_M \leqslant 16)$ en donnant le résultat arrondi au centième.

A la calculatrice, on obtient : $P(9 \leqslant X_M \leqslant 16) \approx 0,683$




**2.** Expliquer comment on peut retrouver le résultat précédent sans la calculatrice.

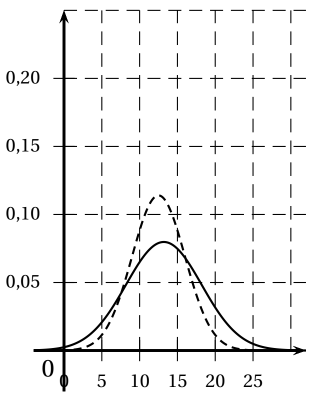
On pouvait aussi remarquer que :

$P(9 \leqslant X_M \leqslant 16) = P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma \approx 0,683$ d'après le cours.

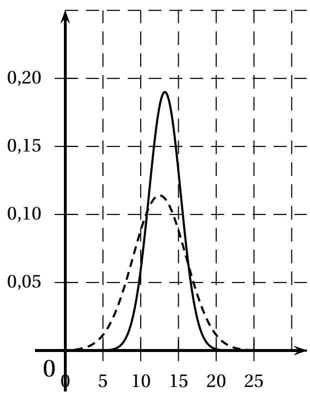
**3.** Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté en pointillé la fonction densité associée à la variable aléatoire $X_M$. La fonction densité associée à $X_F$ est représentée sur un seul de ces graphiques.

Quel est ce graphique ? Expliquer le choix.

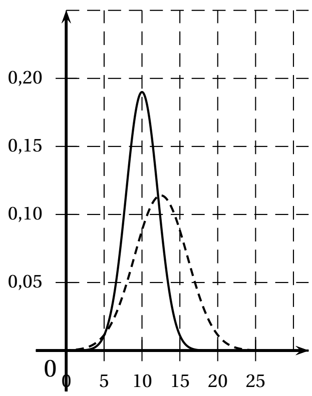
L'espérance de $X_F$ est plus grande que celle de $X_M$ donc la courbe qui représente sa fonction densité est décalée vers la droite par rapport à celle de de $X_M$, ce qui élimine le graphique 3. De plus, l'écart-type de $X_F$ est inférieur à l'écart-type de $X_M$ donc sa courbe représentative est moins évasée. Seul le graphique 2 convient.



Graphique 1



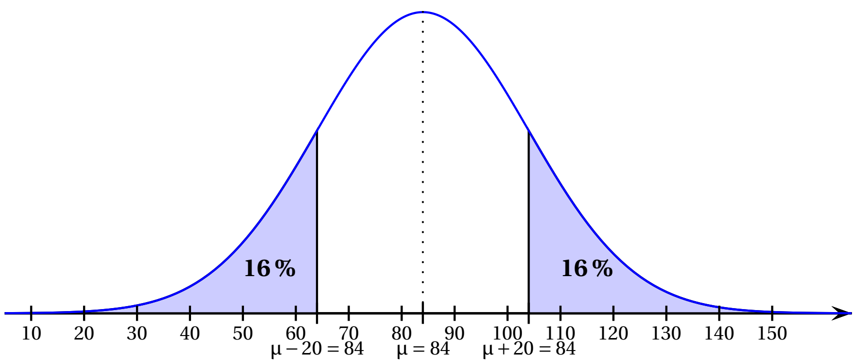
Graphique 2



Graphique 3

▷ **Exercice 2.** Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un appareil électronique. par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type $\sigma$. De plus, on a $P(X \leqslant 64) = 0,16$.

La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



**1.** a) En exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leqslant X \leqslant 104)$.

$P(64 \leqslant X \leqslant 104) = P(84-20 \leqslant X \leqslant 84+20) = 1 - P(X \leqslant 84+20) - P(84-20 \leqslant X)$

mais par symétrie de la courbe, $P(X \leqslant 84+20) = P(84-20 \leqslant X)$ donc $P(64 \leqslant X \leqslant 104) = 1 - 2 \times 0,16 = 0,68$.

b) Quelle valeur approchée entière de $\sigma$ peut-on proposer ?

On sait que $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma \approx 0,68$ donc d'après ce qui précède, $\sigma \approx 20$

**2.** On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{X-84}{\sigma}$.

a) Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?

Z est la variable aléatoire centrée réduite de X donc elle suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$

b) Justifier que $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.

$$\begin{aligned} X \leqslant 64 &\iff X - 84 \leqslant 64 - 84 \\ &\iff \frac{X-84}{\sigma} \leqslant \frac{-20}{\sigma} \quad (\sigma > 0) \\ &\iff Z \leqslant \frac{-20}{\sigma} \end{aligned}$$

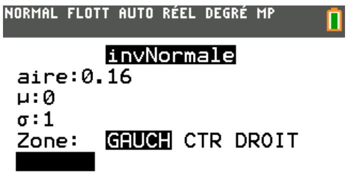
Les événements $X \leqslant 64$ et $Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}$ sont équivalents donc $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.

c) En déduire la valeur de $\sigma$, arrondie à $10^{-3}$.

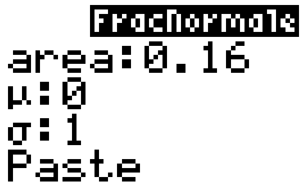
$P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right) = 0,16$

On obtient à l'aide de la calculatrice : $\dfrac{-20}{\sigma} \approx -0,994$ soit $\sigma \approx \dfrac{-20}{-0,994} \approx 20,121$

**TI-83 Premium CE**




**TI-82 *Advanced***

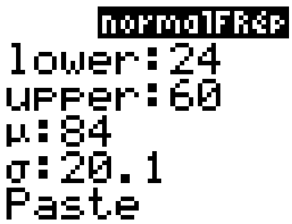



**3.** Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$. Les probabilités demandées seront arrondies à $10^{-3}$.

a) Calculer la probabilité que la durée de vie de cet appareil soit comprise entre 2 et 5 ans.

La probabilité que la durée de vie de cet appareil soit comprise entre 2 et 5 ans, c'est à dire entre 24 et 60 mois est :

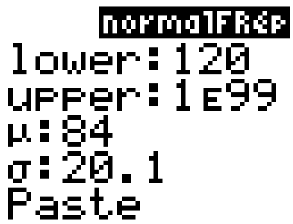
$P(24 \leqslant X \leqslant 60) \approx 0,115$




b) Calculer la probabilité que cet appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

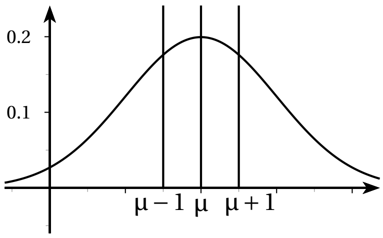
La probabilité que la durée de vie de cet appareil soit supérieure à 10 ans, c'est à dire entre 120 mois est :

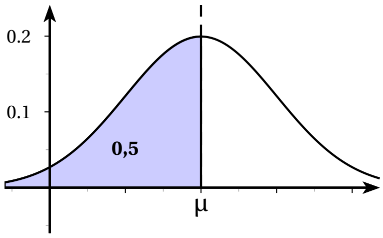
$P(X \geqslant 120) \approx 0,037$

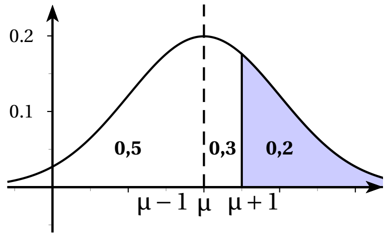


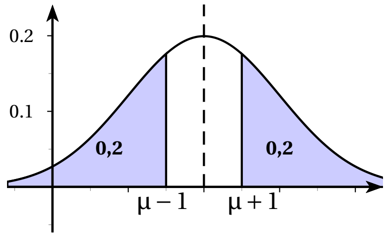
▷ **Exercice 3.** X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$. On sait que $P(\mu < X < \mu+1) = 0,3$.

**1.** Sur le graphique ci-dessous, hachurer la partie du plan qui illustre la probabilité donnée dans l'énoncé.




**2.** Donner sans justifier les probabilités suivantes :

a) $P(X < \mu) = 0,5$

b) $P(X > \mu+1) = 0,5 - 0,3 = 0,2$

c) $P(X < \mu-1) = P(X > \mu+1) = 0,2$

d) $P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) \approx 0,68$ donc $P(X > \mu+\sigma) = \dfrac{1 - P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma)}{2} \approx \dfrac{1-0,68}{2} \approx 0,16$

▷ **Exercice 4.** Une cantine sert des repas en nombre très important. Soit X la variable aléatoire qui donne le poids en grammes des rations de viande. On suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}(120;225)$.

**1.** Quel est le poids moyen d'une ration de viande ?

$\mu = 120\,\text{g}$

**2.** Quelle est la probabilité pour que le poids d'une ration de viande soit compris entre $110g$ et $135g$ ?

$X \sim \mathcal{N}(120;225)$ soit $X \sim \mathcal{N}(120;15^2)$ donc $\begin{cases} \mu = 120 \\ \sigma = 15 \end{cases}$

On obtient à la calculatrice : $P(110 \leqslant X \leqslant 135) \approx 0,589$

**3.** Le 4 juin, la cantine a servi 850 repas. A combien peut-on évaluer le nombre de rations de viande dont le poids dépassait $130g$ ?

A la calculatrice, on obtient :

$P(X > 130) \approx 0,252$ donc la proportion du nombre de rations supérieures à 130 g est environ égale à 0,252 ce qui correspond, pour 850 repas, à $850 \times 0,252 \approx 214$ rations.

**4.** Le cuisinier souhaite que le poids moyen d'une portion reste le même mais il veut améliorer la découpe de la viande de telle manière que la proportion de portions ayant un poids inférieur à $100g$ soit égale à 0,001. Ainsi X suit la loi normale $\mathcal{N}(120;\sigma^2)$. Déterminer une valeur approchée de σ à $10^{-2}$ près.

$P(X \leqslant 100) = 0,001$

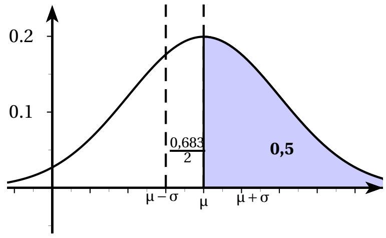
$$\begin{aligned} X \leqslant 100 &\iff X - 120 \leqslant -20 \\ &\iff \frac{X-120}{\sigma} \leqslant \frac{-20}{\sigma} \\ &\iff Z \leqslant \frac{-20}{\sigma} \end{aligned}$$

avec $Z = \dfrac{X-120}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0;1)$

Ainsi, $P(X \leqslant 100) = P(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}) = 0,001$

On obtient à l'aide de la calculatrice : $\dfrac{-20}{\sigma} \approx -3,09 \iff \sigma \approx \dfrac{-20}{-3,09} \approx 6,47$

▷ **Exercice 5.** La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(2;9)$.




**1.** Déterminer $P(X \leq 1)$, $P(X > 2)$, $P(X \geq -1)$.

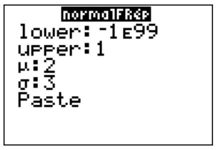
$X \sim \mathcal{N}(2;9) = \mathcal{N}(2;3^2)$ d'où $\begin{cases} \mu = 2 \\ \sigma = 3 \end{cases}$.

On obtient à la calculatrice :

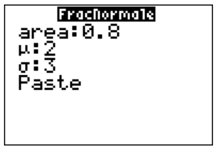
- $P(X \leq 1) \approx 0,369$
- $P(X > 2) = 0,5$
- $P(X \geq -1) = P(X \geq \mu - \sigma) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$

  donc $P(X \geq -1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times 0,683 \approx 0,842$

$P(X \leq 1)$




$P(X \leq \alpha) = 0,8$




**2.** Déterminer α tel que $P(X \leq \alpha) = 0,8$.

$\alpha \approx 4,525$ ( FracNormale ...)

**3.** Déterminer β tel que $P(X > \beta) = 0,1$.

$P(X > \beta) = 0,1 \iff P(X \leqslant \beta) = 1 - 0,1 = 0,9$

A l'aide de la calculatrice, on obtient : $\beta \approx 5,845$

▷ **Exercice 6.** Lors d'un jeu télévisé, 60% des candidats ont gagné moins de 500€. Les gains suivent une loi normale d'écart-type 300€. Calculer l'espérance de gain à ce jeu.

Notons X la variable aléatoire égale au gain d'un candidat. X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ 300)$ où l'espérance μ est à déterminer.

On sait que $P(X \leq 500) = 0,6$

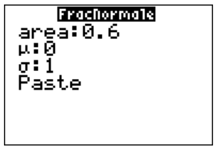
$$\begin{aligned} X \leq 500 &\iff X - \mu \leq 500 - \mu \\ &\iff \frac{X-\mu}{300} \leq \frac{500-\mu}{300} \\ &\iff Z \leq \frac{500-\mu}{300} \end{aligned}$$

Ainsi $P(X \leq 500) = P\left(Z \leq \dfrac{500-\mu}{300}\right) = 0,6$ où Z est la variable aléatoire centrée réduite de X donc $Z \sim \mathcal{N}(0\ ;\ 1)$

On obtient à l'aide de la calculatrice : $\dfrac{500-\mu}{300} \approx 0,253$

d'où $500 - \mu \approx 300 \times 0,253$ soit $\mu \approx 424,1$

L'espérance de gain est donc environ égale à 424€.




▷ **Exercice 7.** Dans une entreprise, la demande mensuelle X de pièces automobiles du même type suit une loi normale d'espérance $\mu = 600$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

**1.** Sans faire de calcul, donner la probabilité que le nombre de pièces demandées soit compris entre 520 et 680.

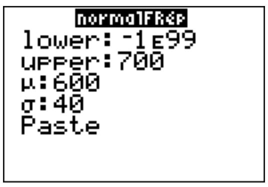
$P(520 \leqslant X \leqslant 680) = P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$

**2.** Sans faire de calcul, donner la probabilité que le nombre de pièces demandées soit compris entre 480 et 720.

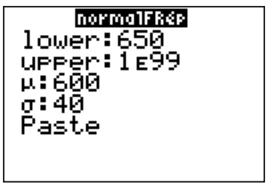
$P(480 \leqslant X \leqslant 720) = P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0,997$

**3.** Calculer $P(X \leq 700)$, $P(X \geq 650)$ et $P(X \geq 550)$.

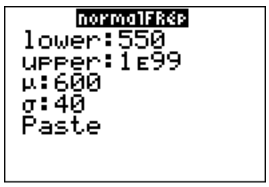
$P(X \leq 700) \approx 0,994$




$P(X \geq 650) \approx 0,106$

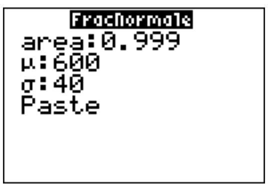



$P(X \geq 550) \approx 0,894$




**4.** Déterminer la valeur de α telle que $P(X \leq \alpha) = 0,999$.

$\alpha \approx 724$



▷ **Exercice 8.** On dispose de deux machines $M_1$ et $M_2$ pour produire les médailles. Une médaille est dite conforme lorsque sa masse est comprise entre 9,9 et 10,1 grammes.

**1.** Après plusieurs séries de tests, on estime que la machine $M_1$ produit des médailles dont la masse X en grammes suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,06.

On note C l'évènement « la médaille est conforme ».

Calculer la probabilité qu'une médaille produite par la machine $M_1$ ne soit pas conforme. On donnera le résultat arrondi à $10^{-3}$ près.

$P(C) = P(9{,}9 \leq X \leq 10{,}1)$ avec $X \sim \mathcal{N}(10\,;\,0{,}06^2)$.

On obtient à la calculatrice : $P(C) = 0{,}904$. La probabilité qu'elle ne soit pas conforme est donc $P\left(\overline{C}\right) = 1 - P(C) \approx 0{,}096$

**2.** La proportion des médailles non conformes produites par la machine $M_1$ étant jugée trop importante, on utilise une machine $M_2$ qui produit des médailles dont la masse Y en grammes suit la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type $\sigma$.

a) Soit Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{Y-10}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par la variable Z?

Z est la variable aléatoire centrée réduite de Y donc $Z \sim \mathcal{N}(0\,;\,1)$

b) Sachant que cette machine produit 6 % de pièces non conformes, déterminer la valeur arrondie au millième de $\sigma$.

$P\left(\overline{C}\right) = 1 - P(C) = 0{,}06$ donc $P(C) = P(9{,}9 \leq Y \leq 10{,}1) = 0{,}94$.

A l'aide de la courbe ci-dessous et de ses propriétés de symétrie, on en déduit par exemple que $P(Y \leq 10{,}1) = 0{,}97$.

Or, $Y \leq 10{,}1 \iff Y - 10 \leq 0{,}1 \iff \dfrac{Y-10}{\sigma} \leq \dfrac{0{,}1}{\sigma} \iff Z \leq \dfrac{0{,}1}{\sigma}$

Ainsi $P(Y \leq 10{,}1) = P\left(Z \leq \dfrac{0{,}1}{\sigma}\right) = 0{,}97$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0\,;\,1)$.

On obtient à l'aide de la calculatrice : $\dfrac{0{,}1}{\sigma} \approx 1{,}881 \iff \sigma \approx \dfrac{0{,}1}{1{,}881} \approx 0{,}053$