Lois de probabilités

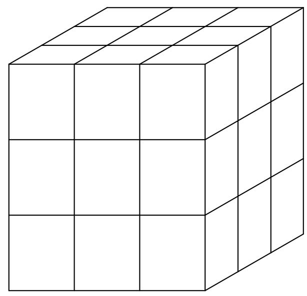
▷ **Exercice 1.** On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On marque 10 points si on a tiré l'as de cœur, 5 points si on a tiré un autre as, 3 points si on a tiré une figure (Valet, Dame ou Roi) et aucun point dans tous les autres cas. On définit ainsi une variable aléatoire X. Donner la loi de probabilité de X, calculer son espérance et son écart-type.

x_i	0	3	5	10
$p(X = x_i)$	$\frac{16}{32} = \frac{1}{2}$	$\frac{12}{32} = \frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

- $\mathbb{E}(X) = \sum p_i x_i = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{3}{8} \times 3 + \frac{3}{32} \times 5 + \frac{1}{32} \times 10 = \frac{61}{32}$
- $\mathbb{V}(X) = \sum p_i x_i^2 - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{2} \times 0^2 + \frac{3}{8} \times 3^2 + \frac{3}{32} \times 5^2 + \frac{1}{32} \times 10^2 - \left(\frac{61}{32}\right)^2 = \frac{283}{32} - \left(\frac{61}{32}\right)^2 = \frac{5335}{1024} \simeq 5,21.$

  Ainsi $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\frac{5335}{1024}} \simeq 2,28$

▷ **Exercice 2.** On fabrique un gros cube en agglomérant 27 petits cubes (voir figure ci-dessous). On peint en rouge toutes les faces du gros cube, puis on sépare de nouveau les 27 petits qui ont donc certaines de leurs faces peintes en rouge. On tire au hasard un petit cube et on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de faces peintes en rouge sur le petit cube tiré. Donner la loi de probabilité de X, calculer son espérance et son écart-type.



$X(\Omega) = \{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 \}$

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{27} = \frac{2}{9}$	$\frac{12}{27} = \frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum p_i x_i \\ &= \frac{1}{27} \times 0 + \frac{2}{9} \times 1 + \frac{4}{9} \times 2 + \frac{8}{27} \times 3 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \sum p_i x_i^2 - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \frac{1}{27} \times 0^2 + \frac{2}{9} \times 1^2 + \frac{4}{9} \times 2^2 + \frac{8}{27} \times 3^2 - 2^2 \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

donc $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

▷ **Exercice 3.** *Loterie*

Partie A

Une roue de loterie comporte trois secteurs, portant respectivement les numéros 1, 2 et 3. Quand on fait tourner la roue, un repère indique le numéro sortant. La probabilité de sortie du numéro 2 est double de la probabilité du numéro 1, et la probabilité du numéro 3 est triple de celle du numéro 1. Calculer les probabilités de sortie respectives des trois numéros.

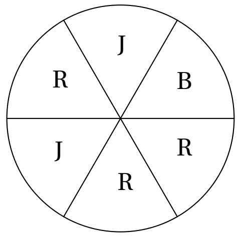
$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) = 1$ avec $P(\{2\}) = 2P(\{1\})$ et $P(\{3\}) = 3P(\{1\})$ donc $P(\{1\}) + 2P(\{1\}) + 3P(\{1\}) = 1 \iff P(\{1\}) = \frac{1}{6}$

d'où finalement $\begin{cases} P(\{1\}) = \frac{1}{6} \\ P(\{2\}) = \frac{1}{3} \\ P(\{3\}) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Partie B

La roue est maintenant divisée en six secteurs égaux ayant chacun la même probabilité de s'arrêter devant le repère :

- 2 secteurs sont jaunes (J sur la figure)
- 3 secteurs sont rouges (R sur la figure)
- 1 secteur est bleu (B sur la figure).



La règle du jeu est la suivante : pour participer au jeu, le joueur doit miser une certaine somme et si le jaune sort, il gagne 20€, si le bleu sort, il gagne 30€, si le rouge sort, il ne gagne rien.

1. Dans cette question, on suppose que la mise est de 10€. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque arrêt de la roue associe le gain effectif (positif ou négatif) du joueur.

a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

$X(\Omega) = \{-10\,;\,10\,;\,20\}$. On en déduit la loi de probabilité de X :

x_i	-10	10	20
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

b) Calculer son espérance mathématique.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum p_i x_i\\ &= \frac{1}{2}\times(-10)+\frac{1}{3}\times 10+\frac{1}{6}\times 20\\ &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

2. L'organisateur du jeu ne souhaite pas que l'espérance de gain du joueur soit positive. A quelle valeur minimale, exprimée par un nombre entier d'euros, doit-il fixer le montant de la mise ?

Soit m la mise en euros. $X(\Omega) = \{-m\,;\,20-m\,;\,30-m\}$. La loi de probabilité de X devient :

x_i	$-m$	$20-m$	$30-m$
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Ainsi $\mathbb{E}(X) < 0 \iff \dfrac{1}{2}\times(-m)+\dfrac{1}{3}\times(20-m)+\dfrac{1}{6}\times(30-m) < 0 \iff -m+\dfrac{35}{3} < 0 \iff m > \dfrac{35}{3}$

$\dfrac{35}{3} \approx 11{,}67$ donc il faut que la mise soit supérieure ou égale à 12 €.

▷ **Exercice 4.** Une urne contient 10 boules blanches et n boules noires ($n \geq 2$). Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Si on tire une boule blanche on gagne 2 euros, si on tire une boule noire on perd 3 euros. On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur.

1. Donner la loi de probabilité de X.

$X(\Omega) = \{-3\,;\,2\}$

x_i	-3	2
$p(X = x_i)$	$\frac{n}{10+n}$	$\frac{10}{10+n}$

2. Calculer l'espérance de X.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum p_i x_i\\ &= \frac{n}{10+n}\times(-3)+\frac{10}{10+n}\times 2\\ &= \frac{20-3n}{10+n}\end{aligned}$$

3. Pour combien de boules noires dans l'urne le jeu est-il favorable au joueur ?

$\mathbb{E}(X) > 0 \iff \dfrac{20-3n}{10+n} > 0 \iff 20-3n > 0 \iff n < \dfrac{20}{3} \approx 6{,}67$ donc pour un nombre de boules noires inférieur ou égal à 6, le jeu est favorable au joueur.

▷ **Exercice 5.** Un sac contient des boules indiscernables au toucher : 1 boule rouge, 3 boules jaunes et n boules noires. (n désigne un entier naturel strictement positif). On organise un jeu consistant, pour chaque joueur, à prélever dans le sac une boule au hasard. Si la boule tirée est rouge, le joueur reçoit 10€ ; si la boule est jaune, il reçoit 2€ ; si la boule est noire, il ne reçoit rien. Pour participer au jeu, le joueur doit acheter un billet d'entrée coûtant 1€. On note X_n la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée dans le sac, associe le gain algébrique du joueur (somme reçue moins la mise).

1. Quel est le nombre de boules dans le sac ?

Il y a $n+4$ boules dans le sac.

2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n .

$X_n(\Omega) = \{-1\ ;\ 1\ ;\ 9\}$. On en déduit la loi de probabilité de X :

x_i	-1	1	9
$p(X = x_i)$	$\frac{n}{n+4}$	$\frac{3}{n+4}$	$\frac{1}{n+4}$

3. Déterminer, en fonction de n, l'espérance mathématique de X_n .

$\mathbb{E}(X) = \sum p_i x_i = -1 \times \dfrac{n}{n+4} + 1 \times \dfrac{3}{n+4} + 9 \times \dfrac{1}{n+4} = \dfrac{12-n}{n+4}$

4. On souhaite que l'espérance soit négative. Quel nombre minimal de boules noires doit-il y avoir dans le sac ?

$\mathbb{E}(X) \leq 0 \iff \dfrac{12-n}{n+4} \leq 0 \iff 12 - n \leq 0 \iff n > 12$

Il faut donc un minimum de 13 boules pour que l'espérance soit strictement négative.

▷ **Exercice 6.** Un jeu consiste à lancer de la main gauche, une balle dans un seau. Parmi l'ensemble des joueurs, $\dfrac{5}{6}$ sont droitiers et $\dfrac{1}{6}$ sont gauchers. Pour un joueur droitier, la probabilité de mettre la balle dans le seau est $\dfrac{1}{4}$. Pour un joueur gaucher, cette probabilité est $\dfrac{1}{2}$.

1. On choisit au hasard un individu dans cette population. On note :

G : l'événement : « l'individu choisi est gaucher »,

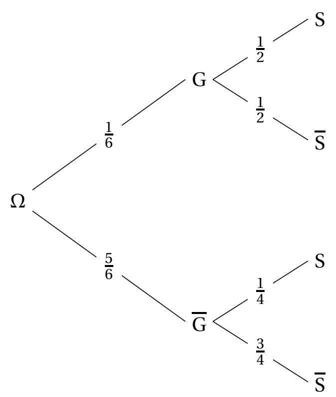
S : l'événement : « l'individu met la balle dans le seau ».

a) Déterminer la probabilité de l'événement $G \cap S$.

$P(G \cap S) = P(G) \times P_G(S) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{12}$

b) Calculer la probabilité de l'événement S.

G et $\overline{G}$ constituent une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

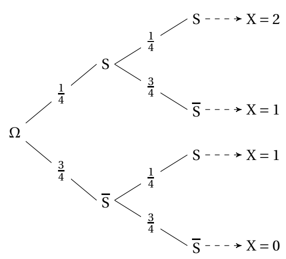


$$\begin{aligned} P(S) &= P(G \cap S) + P\left(\overline{G} \cap S\right) \\ &= P(G) \times P_G(S) + P\left(\overline{G}\right) \times P_{\overline{G}}(S) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{7}{24} \end{aligned}$$

2. Dans cette question, on a sélectionné Paul qui est un joueur droitier. Il lance deux balles l'une après l'autre ; on suppose les deux lancers indépendants. Soit X le nombre de balles mises par Paul dans le seau après les deux lancers.

a) Déterminer les valeurs prises par X.

$X(\Omega) = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$



b) Déterminer la loi de probabilité associée aux valeurs prises par X. Quelle est son espérance ?

L'événement $X = 0$ est réalisé selon un seul chemin qui a pour probabilité $P(X=0) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{16}$.

L'événement $X = 1$ est réalisé selon deux chemins qui ont chacun pour probabilité $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16}$

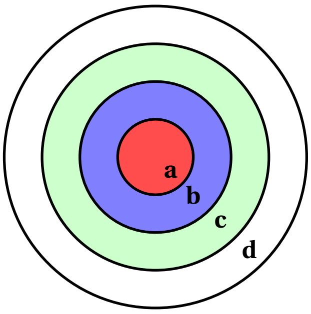
donc $P(X=1) = 2 \times \dfrac{3}{16} = \dfrac{3}{8}$.

L'événement $X = 2$ est réalisé selon un seul chemin qui a pour probabilité $P(X=2) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum p_i x_i \\ &= \frac{9}{16} \times 0 + \frac{6}{16} \times 1 + \frac{1}{16} \times 2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

▷ **Exercice 7.** Le dessin ci-dessous représente une cible constituée de 4 cercles concentriques. Leurs rayons sont respectivement 10 cm, 20 cm, 30 cm, 40 cm et ils définissent 4 zones a, b, c, d. Au tir, la probabilité d'atteindre la cible est $\frac{2}{3}$ et la probabilité d'atteindre chacune des zones, a, b, c, d est proportionnelle à son aire.



$zone$	$cible$	a	b	c	d
$aire$	1600π	100π	300π	500π	700π
$probabilité$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{7}{24}$

$\times \frac{1}{2400\pi}$

1. Calculer la probabilité d'atteindre chacune des zones a,b,c,d.

   La probabilité de chaque zone est proportionnelle à son aire. Il faut donc calculer l'aire de chaque secteur :

   - $aire(cible) = \pi r^2 = \pi \times 40^2 = 1600\pi$
   - $aire(a) = \pi \times 10^2 = 100\pi$
   - $aire(b) = \pi \times 20^2 - \pi \times 10^2 = 300\pi$
   - $aire(c) = \pi \times 30^2 - \pi \times 20^2 = 500\pi$
   - $aire(d) = \pi \times 40^2 - \pi \times 30^2 = 500\pi$

2. Soit X la variable aléatoire qui prend les valeurs 4, 3, 2, 1 quand on atteint les zones a, b, c, d respectivement et 0 quand on rate la cible. Déterminer l'espérance de X.

x_i	0	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum p_i\, x_i \\ &= \frac{1}{3}\times 0 + \frac{7}{24}\times 1 + \frac{5}{24}\times 2 + \frac{1}{8}\times 3 + \frac{1}{24}\times 4 \\ &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

▷ **Exercice 8.** Une variable aléatoire X est telle que $\mathbb{E}(X) = 6$ et $\sigma(X) = 2,5$.

1. Déterminer les deux nombres réels a et b, avec a positif, tels que la variable aléatoire Y définie par $Y = aX + b$ ait pour espérance 0 et pour écart-type 1.

$$\begin{cases}\mathbb{E}(Y) = 0 \\ \sigma(Y) = 1\end{cases} \iff \begin{cases}\mathbb{E}(aX+b) = 0 \\ \sigma(aX+b) = 1\end{cases} \iff \begin{cases}a\mathbb{E}(X) + b = 0 \\ |a|\sigma(X) = 1\end{cases} \underset{\substack{a\geq 0 \\ |a|=a}}{\iff} \begin{cases}6a + b = 0 \\ 2,5a = 1\end{cases} \iff \begin{cases}6\times\frac{2}{5} + b = 0 \\ a = \frac{2}{5}\end{cases} \iff \begin{cases}b = -\frac{12}{5} \\ a = \frac{2}{5}\end{cases}$$

2. Même question en notant μ l'espérance de X et σ son écart-type ($\sigma \neq 0$). On dit alors que la nouvelle variable Y est centrée et réduite.

$$\begin{cases}\mathbb{E}(Y) = 0 \\ \sigma(Y) = 1\end{cases} \iff \begin{cases}\mathbb{E}(aX+b) = 0 \\ \sigma(aX+b) = 1\end{cases} \iff \begin{cases}a\mathbb{E}(X) + b = 0 \\ |a|\sigma(X) = 1\end{cases} \underset{\substack{a\geq 0 \\ |a|=a}}{\iff} \begin{cases}a\mu + b = 0 \\ a\sigma = 1\end{cases} \underset{\sigma\neq 0}{\iff} \begin{cases}\frac{1}{\sigma}\times\mu + b = 0 \\ a = \frac{1}{\sigma}\end{cases} \iff \begin{cases}b = -\frac{\mu}{\sigma} \\ a = \frac{2}{5}\end{cases}$$

Ainsi $\boxed{Y = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{X-\mu}{\sigma}}$