Exercice 1

Soit $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| = 1$ *et* $z^2 \neq 1$ *.Montrer que le nombre* $\frac{z^2+1}{z^2-1}$ *est imaginaire pure .*

Exercice 2

Soit $z \in C - \{-i\}$ *Montrer que :* $\mathrm{Im}(z) > 0 \Leftrightarrow \left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1$

Exercice 3

Soient a , b , c tris nombres complexes tels que : $|a| = |b| = |c| = 1$

1) *Montrer que :* $\left|\frac{a-b}{1-a\overline{b}}\right| = 1$

2) *Montrer que* $|ab + bc + ca| = |a + b + c|$

Exercice 4

Soit z *et* $z' \in \mathbb{C}$

1) *Montrer que* $(\forall z \in \mathbb{C}) \ : \ |z+1| = |z| + 1 \Leftrightarrow z \in IR^+$

2) *Montrer que* $(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2) \ : \ |z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow (\exists \alpha \in IR^+) : (z = \alpha z' \text{ ou } z' = \alpha z)$

Exercice 5

Pour tout $z \neq 1$ *on pose* $z' = \frac{z-1}{1-\overline{z}}$ *et on considère les points* $M(z)$ *et* $M'(z')$

1) *montrer que* $|z'| = 1$, $\frac{z'-1}{z-1}$ *est réel et* $\frac{z'+1}{z-1}$ *est imaginaire pure*

2) *en déduire une construction géométrique du pont* M' *à partir du point* M .

Exercice 6

Pour tout $z \neq i$ *on pose* $f(z) = \frac{\overline{z}}{1 - i\overline{z}}$

1) *Montrer que* $f(z) \in IR \Leftrightarrow |z|^2 - \mathrm{Im}(z) = 0$

2) *déterminer la nature des deux ensembles* $E = \{M(z) \in P \ / \ f(z) \in IR\}$ *et*
$E = \{M(z) \in P \ / \ f(z) \in IR\}$

3) *On considère les points* $A(i)$, $M(z)$, $M'(f(z))$

a) *montrer que* $f(z) - i = \frac{-i}{1 - i\overline{z}}$ *En déduire l'ensemble* $G = \{M(z) \in P \ / |f(z) - i| = 2\}$

b) *montrer que* $f(z) - i = \frac{1}{|1 - i\overline{z}|^2}(z - i)$ *En déduire un mesure de l'angle* $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}})$

Exercice 7

Soit A, B, C trois points distincts du plan complexe d'affixes a, b, c. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

i) ABC est un triangle équilatéral.

ii) j *ou* j^2 *est solution de l'équation* $az^2 + bz + c = 0$.

iii) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

Application *: Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. On construit, à l'extérieur de ce triangle, les trois triangles équilatéraux de bases AB, BC, CA. Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.*

Exercice 8

1) Soit (C) le cercle de centre $A(z_0)$ et de rayon R. Montrer que (C) est l'ensemble des points $M(z_0)$ tels que : $z\bar{z}-\bar{z}_0 z - z_0\bar{z}+z_0\bar{z}_0-R^2=0$

2) Réciproquement soient $c\in\mathbb{C}$ et $\gamma\in IR$. Quel est l'ensemble des points M(z) tels que $z\bar{z}-\bar{c}z-c\bar{z}+\gamma=0$

Application : **:** Soient $\theta\in IR$ et $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ avec $a\neq b$. On considère les points A(a) et B(b).

Trouver l'ensemble des points M tels que $\overline{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})}\equiv\theta\,[\pi]$

Exercice 9

Soient u, v, w trois nombres complexes unitaires tels que $u+v+w=0$.

1) Montrer que $Ré(v\bar{w})=\frac{-1}{2}$ en déduire la valeur de $v\bar{w}$.

2) Montrer que : $u=jv=j^2w$ ou $u=jw=j^2v$.

Exercice 10

On pose $u=e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $S=u+u^2+u^4$ et $T=u^3+u^5+u^6$

1) Montrer que S et T sont conjugués et I m(S) > 0.

2) Calculer S + T et ST . En déduire S et T . 3) calculer $\frac{u}{1+u^2}+\frac{u^2}{1+u^4}+\frac{u^3}{1+u^6}$

4) en déduire la valeur de $\frac{1}{\cos\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\cos\frac{4\pi}{7}}+\frac{1}{\cos\frac{6\pi}{7}}$

Exercicer11 (Bac 2003 - 2004 1ère session)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+z+1=0$

2) pour tout $z=e^{i\theta}$ avec $-\pi\leq\theta\leq\pi$ et $\theta\neq\frac{2\pi}{3}$ et $\theta\neq-\frac{2\pi}{3}$ on pose $z'=\frac{1}{z^2+z+1}$

a) Montrer que $z^2+z+1=z(1+z+\bar{z})$.

b) calculer le module et l'argument z' en fonction de θ.

c) on pose $z'=x+iy$ avec x et y deux nombres réels . Montrer que : $x^2+y^2=(1-2x)^2$.

d) En déduire que le point M d'affixe z' appartient à une hyperbole dont on déterminera le centre les sommets et les asymptotes .

Exercice 12 (Bac 2003 - 2004 2ème session)

Soit a un nombre complexe dont la forme algébrique est $a=\alpha+i\beta$.

1) Déterminer la nature de $(H)=\{M(z)\ /\ z^2-(\bar{z})^2=a^2-(\bar{a})^2\}$ et tracer (H) pour $a=1+i$

2) Déterminer la nature de $(C)=\{M(z)\ /\ (z-a)(\bar{z}-\bar{a})=4a\bar{a}\}$ et tracer (C) pour $a=1+i$

3) On considère dans $\mathbb{C}$ le système (S) : $\begin{cases} z^2-(\bar{z})^2=a^2-(\bar{a})^2 \\ (z-a)(\bar{z}-\bar{a})=4a\bar{a}\end{cases}$ et on pose $u=z-a$.

a) Montrer que le système est équivalent au système (S') : $\begin{cases} u\bar{u}=4a\bar{a} \\ (u+2a)(u^3-8a(\bar{a})^2)=0\end{cases}$

b) On pose $a=re^{i\theta}$ avec $r>0$ et $-\pi<\theta\leq\pi$. Déterminer en fonction de r et θ les affixes des point d'intersection de (C) et (H).

c) Montrer que l'intersection de (C) et (H) contient trois points sommets d'un triangle équilatéral .

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2+1)^n+(z-i)^{2n}=0$

Exercice 14

Soit $(a,b)\in IR^2$ *avec* $a\neq b$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation* $(z-b)^n-(z-a)^n=0$

2)) Prouver que les solutions sont affixes de points alignés

On considère le nombre complexe $a = e^{\frac{2i\Pi}{5}}$.

1. On note I, A, B, C, D les points du plan complexe d'affixes 1, a, a², a^3, a^4. Vérifier que $a^5 = 1$ et montrer que IA = AB = BC = CD = DI. Placer les points I, A, B, C, D dans le plan complexe (unité: 4 cm).

2. a) Vérifier que, pour tout nombre complexe z:

$$z^5 - 1 = (z - 1)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)$$

et en déduire que: $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0.$ *(1)*

b) Montrer que $a^3 = \bar{a}^2$ *et que* $a^4=\bar{a}$ *et en déduire que:*

$$(a + \bar{a})^2 + (a + \bar{a}) - 1 = 0. \quad (2)$$

c) Résoudre l'équation: $4x^2 + 2x - 1 = 0$

et en déduire, à partir de (2), la valeur exacte de cos $\left(\frac{2\Pi}{5}\right)$.

Exercice 15

1 . Montrer que $(\forall z\in\mathbb{C}-\{-1\})\ :\ |z|=1\Leftrightarrow(\exists\alpha\in IR)$ *tel que* $z=\dfrac{1+i\alpha}{1-i\alpha}$

2 . Soit $a\in\mathbb{C}$, $n\in IN^*$, *montrer q'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^n=a$ *ait des solutions réelles est que* $|a|=1$

Exercice 16

Soit $a,b,c\in\mathbb{C}$ *tel que* $|a|=|b|=|c|=1$ *et* $a\neq c$ *et* $b\neq c$

Montrer que : $\arg\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right)\equiv\dfrac{1}{2}\arg\left(\dfrac{b}{a}\right)\ [2\pi]$

Exercice 18

Soit $n\in IN^*$. *Pour chaque* $k\in\{0,1,2,.....,2n-1\}$ *on pose* $z_k=e^{i\frac{k\pi}{n}}$

1. montrer que $(\forall k\in\{0,1,2,.....,2n-1\})\ \bar{z}_k=z_{2n-k}$

2. En déduire que le nombre $u=\sum_{k=1}^{n-1}z_k$ *est imaginaire pur .*

Exercice 19

On considère le système (S) : $\begin{cases} z^5(1-\bar{z})=1 \\ |z|=|z-1| \end{cases}$

1. montrer que si z est une solution de (S) alors $|z|=|z-1|=1$

2. en déduire que z est une solution de (S) alors $z=e^{i\frac{\pi}{3}}$ *ou* $z=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3. résoudre dans $\mathbb{C}$ *le système (S) .*

Exercice 20

Montrer que $(\forall n\in IN)\ :\ (1+i\sqrt{3})^n+(1-i\sqrt{3})^n=2^{n+1}\cos(n\dfrac{\pi}{3})$

Exercice 21

Soit p *un nombre complexes de module 1 on considère l'équation* $(E_p) : z^2 - 2p^2 z - 1 = 0$

1. *déterminer le nombre complexe p pour que* (E_p) *admette une racine double*
2. *Soit* z_1 *et* z_2 *les racines de* (E_p) *. On pose* $u_1 = \frac{1+z_1}{p}$ *et* $u_2 = \frac{1+z_2}{p}$
   - *a) calculer* $u_1 + u_2$ *et* $u_1.u_2$
   - *b) montrer que si* u_1 *et* u_2 *ne sont pas des réels alors* $|1+z_1| = |1+z_2|$
   - *c) montrer que si* u_1 *et* u_2 *sont des réels alors* $\arg(1+z_1) \equiv \arg(1+z_2)[2\pi]$

Exercice 22

On appelle birapport des quatre complexes z_1, z_2, z_3, z_4 *rangés dans cet ordre le nombre complexe que l'on note* $\beta(z_1, z_2, z_3, z_4)$ *et défini par* $\beta(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \div \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$

Soient M_1, M_2, M_3, M_4 *les points d'affixes* z_1, z_2, z_3, z_4 *.déterminer une condition nécessaires et suffisante portant sur* $\beta(z_1, z_2, z_3, z_4)$ *pour que ces points soient cocycliques ou alignés*

Exercice 23

Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que :

a) les points d'affixe $1, z, \frac{1}{z}, 1-z$ *soient cocycliques .*

b) les points d'affixe z, z^2, z^5 *soient alignés .*

c) les points d'affixe $1, z, z^3$ *soient alignés .*

d) les points d'affixe $z, 2z+1, z-1$ *forment un triangle isocèle en M .*

e) les points d'affixe $1, 1+z, 1+z^2$ *forment un triangle équilateral .*

Exercice 24

1. *Résoudre dans l'équation* $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$
2. *En déduire les tangentes des nombres* $\frac{\pi}{5}$ *et* $\frac{2\pi}{5}$ *que l'on mettra sous la forme* $\sqrt{p+q\sqrt{n}}$

ou' n, p *et* q *sont des éléments de* $\mathbb{Z}$

3. calculer $\tan(\frac{\pi}{60})$.

Exercice 25

On pose $u = e^{\frac{2i\pi}{5}}$

1. *Montrer que* $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = 0$ *et exprimer* $\cos(\frac{2\pi}{5})$ *en fonction des puissances de u .*
4. *en déduire que* $\cos(\frac{2\pi}{5})$ *est racine de l'équation* $4x^2 + 2x - 1 = 0$ *et calculer* $\cos(\frac{2\pi}{5})$,

$\cos(\frac{4\pi}{5})$, $\cos(\frac{6\pi}{5})$, $\cos(\frac{8\pi}{5})$ *puis* $\cos(\frac{\pi}{5})$.

Exercice 26

En utilisant la formule de Newton déduire les valeurs des sommes

$A = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(\frac{2k\pi}{n})$ *Et* $B = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(\frac{2k\pi}{n})$

Exercice 27

Soit $n \in IN^*$ *et* $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ *pour tout* $k \in \{0,1,2,.....,n-1\}$ *on note* A_k *le point d'affixe* ω^k

1. *montrer que* A_{k+1} *est l'image de* A_k *par la rotation r de centre O et d'angle* $\frac{2\pi}{n}$.
2. *caluler la somme* $S = \sum_{k=0}^{n-1} A_k A_{k+1}$

Exercice 28

Soit $\alpha \in IR$ *et* $m \in \mathbb{C}$ *On considère l'équation* $(E) : z^2 - mz + e^{i\alpha} = 0$ *on désigne par* z_0 *et* z_1 *les solutions de l'équation* (E) .

1.*montrer que* $\arg(z_0) + \arg(z_1) \equiv 0[2\pi]$ *et* $|z_0||z_1| = 1$.

2. *On suppose que* $z_0 = e^{i\theta}$. *Donner la forme exponentielle de m .*

Exercice 29

Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *On considère l'équation* $(E_\alpha) : z^2 - 2z + 1 + \tan^2(\alpha) = 0$

1. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* (E_α) *on notera* z_1 , z_2 *ses solutions .*
2. *Déterminer la forme trigonométrique de* z_1 *et* z_2 .
3. *Soient* M_1 *et* M_2 *les points images de* z_1 *et* z_2 *respectivement*
   a) *Montrer que* $OM_1 = OM_2$.
   b) *Déterminer la valeur de* θ *pour que le triangle* (OM_1M_2) *soit équilatère directe .*