EXERCICE 1

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- (P) : " $3\sqrt{3} \geq 2\sqrt{7}$ **ou** $\frac{4}{\frac{2}{3}} = 3$ "
- (Q) : " π *est un nombre rationnel* **et** $(\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2}$ "
- (R) : " $2 \in \mathbb{N} \implies \sqrt{3+2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$ "
- (S) : " $\frac{1}{2} < 0 \implies 3.2^2 = 6^2$ "
- (T) : " $\forall x \in \mathbb{R} \, : \, 4x^2 - 2x + 1 \neq 0$ "
- (U) : " $\forall x \in \mathbb{R} \, : \, x \leq 5 \implies x^2 \leq 25$ "
- (V) : " $\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \, : \, \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ "
- (W) : " $\forall x \in \mathbb{R}^+ \, ; \, \exists y \in \mathbb{R} \, : \, (y-1)^2 = x$ "

EXERCICE 2

- *Montrer que : montrer que* : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 : \sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{x+y+2}{2} \iff x = 1$ *et* $y = 1$
- *montrer que* : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2+y^2}{2} = x + y - 1 \implies x = 1$ *et* $y = 1$
- *montrer que* : $\forall x > 1 \, ; \, \forall y > 1 : x \neq y \implies \frac{x}{1+x^2} \neq \frac{y}{1+y^2}$
- *montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$ (n^2 *est pair* $\implies n$ *est pair*)
- *montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}$: ($x \neq -8 \implies \frac{x+2}{x+5} \neq 2$)
- *Montrer que* $x^2 + xy - 2x - 2y = (x-2)(x+y)$ *et résoudre dans* $\mathbb{R}$ *le système suivant :*

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x^2 + xy - 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

- *montrer qu* $\forall x \in \mathbb{R}$ $|x-1| \leq x^2 - x + 1$
- *montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$: $(n(n+1)(n+2)$ *est divisible par* 3
- *montrer que* $\forall n \, \mathbb{N}$: $\sqrt{n^2+1}$ *n'est pas un entier*

EXERCICE 3

- *montrer que* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ $(a \leq b \implies a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$
- *montrer que* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2$ $(a \leq b \implies a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b$

EXERCICE 4

Montrer par récurrence que :

- $\forall n \in \mathbb{N}$: $3^{2n} - 2^n$ *est divisible par* 7
- $\forall n \in \mathbb{N}$: $4^n + 15n - 1$ *est divisible par* 9
- $\forall n \in \mathbb{N}$: $\sum_0^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots \ldots . n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
- $\forall n \geq 3$: $2^n \geq 2n + 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}$: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$

EXERCICE 5

- *Soient a ; b et c des nombres réels strictement positifs montrer que* : $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{2}$