Exercices de préparation au dst du Mardi 14 Avril 2015

Avertissement: il s'agit d'exercices-type, en aucun cas l'énoncé du dst...

EXERCICE 1 *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*

1. La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ est une primitive de la fonction f définie par :

A : $f(x) = -x\mathrm{e}^{-x^2}$ **B :** $f(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$ **C :** $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$ **D :** $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

2. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (7x-23)\mathrm{e}^{x}$. L'équation $h(x) = 0$

A : a pour solution $2,718$ **B :** a une solution sur $[0\,;\,+\infty[$
C : a deux solutions sur $\mathbb{R}$ **D :** a une solution sur $]-\infty\,;\,0]$

3. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 3\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$. On peut affirmer que :

A : $I = \mathrm{e}^3 - 1$ **B :** $I = 3\mathrm{e}^3 - 3$ **C :** $I = 19,1$ **D :** $I = 1 - \mathrm{e}^3$.

4. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 9x$ est convexe sur l'intervalle :

A : $]-\infty\,;\,+\infty[$ **B :** $[0\,;\,+\infty[$ **C :** $]-\infty\,;\,0]$ **D :** $[-3\,;\,3]$

5. Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ et f' sa fonction dérivée. On a :

a. $f'(x) = \dfrac{\ln(x)-1}{x^2}$ **b.** $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$ **c.** $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **d.** $f'(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$

6. Une augmentation de 20 % suivie d'une augmentation de 15 % est équivalente à une augmentation globale de :

a. 17,5 % **b.** 30 % **c.** 35 % **d.** 38 %

7. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$. L'image $f(\ln 2)$ de $\ln 2$ par f est égale à :

a. $\ln 2$ **b.** $-2\ln 2$ **c.** $2\ln 2$ **d.** $\dfrac{1}{2}\ln 2$

EXERCICE 2

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B.

PARTIE A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;6]$ par $f(x) = 1-(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que $f'(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\,;6]$.
Déterminer une valeur arrondie de α à $0,01$.

3. On admet que la fonction F définie sur $[0\,;6]$ par $F(x) = x+(x+2)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur $[0\,;6]$. Donner la valeur exacte puis une valeur arrondie à 10^{-3} de $I = \displaystyle\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.

PARTIE B

Une entreprise lance la production de batteries pour véhicules électriques.
Une étude a modélisé le rythme de la production journalière sur les six premiers mois à l'aide de la fonction f définie dans la partie A pour x compris entre 0 et 6.
x représente le nombre de mois (de 30 jours) depuis le lancement du produit.
$f(x)$ représente la production journalière de batteries en milliers.

Exprimer en mois puis en jours le moment où la production atteindra $0,5$ millier soit 500 unités.

PARTIE C

Il est prévu que l'autonomie permise par ce type de batteries, sous certaines conditions de conduite, soit de 200 km.
Sur un parcours joignant une ville située à 160 km, on suppose que l'autonomie, exprimée en km, permise par ces batteries suit une loi normale d'espérance $\mu = 200$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de ne pas atteindre cette ville ?

2. La probabilité de pouvoir faire l'aller-retour jusqu'à cette ville sans recharge des batteries est-elle supérieure à $0,01$? Justifier votre réponse.

EXERCICE 4

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur la durée de la pause du midi ainsi que sur les rythmes scolaires.
L'enquête révèle que 55 % des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi et parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

Parmi ceux qui ne veulent pas de pause plus longue le midi, seulement 10 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
On choisit un élève au hasard dans le lycée. On considère les évènements suivants :

— L : l'élève choisi est favorable à une pause plus longue le midi ;
— C : l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2. Calculer $P(L \cap C)$ la probabilité de l'évènement $L \cap C$.

3. Montrer que $P(C) = 0{,}5675$.

4. Calculer $P_C(L)$, la probabilité de l'évènement L sachant l'évènement C réalisé. En donner une valeur arrondie à 10^{-4}.

5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. Le nombre d'élèves étant suffisamment grand, on considère que X suit une loi binomiale.

a. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

b. Calculer la probabilité qu'aucun des quatre élèves interrogés ne soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. En donner une valeur arrondie à 10^{-4}.

c. Calculer la probabilité qu'exactement deux élèves soient favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

EXERCICE 3

Le 1er janvier 2000, un client a placé 3 000 € à intérêts composés au taux annuel de 2,5 %.
On note C_n le capital du client au 1er janvier de l'année $2000 + n$, où n est un entier naturel.

1. Calculer C_1 et C_2. Arrondir les résultats au centime d'euro.

2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a la relation : $C_n = 3000 \times 1{,}025^n$.

3. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un nombre S supérieur à 3 000
Traitement	Affecter à n la valeur 0. *Initialisation* Affecter à U la valeur 3 000 *Initialisation* Tant que $U \leqslant S$ n prend la valeur $n+1$ U prend la valeur $U \times 1{,}025$ Fin tant que
Sortie	Afficher le nombre $2000 + n$

a. Pour la valeur $S = 3300$ saisie, recopier et compléter autant que nécessaire le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à l'unité.

Valeur de n	0	1	....	
Valeur de U	3 000		....	
Condition $U \leqslant S$	vrai		....	

b. En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de S saisie est 3 300.

c. Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenu en sortie de cet algorithme quand on saisit un nombre S supérieur à 3 000.

4. Au 01/01/2013, le client avait besoin d'une somme de 5 000 €. Montrer que le capital de son placement n'est pas suffisant à cette date.

5. Déterminer, en détaillant la méthode, à partir du 1er janvier de quelle année le client pourrait avoir son capital initial multiplié par 10.

EXERCICE 5

Une entreprise qui produit du papier recyclé, a été créée en l'année 2000 et le tableau ci-dessous donne l'évolution de sa production.

Année	2000	2002	2004	2006	2008	2010	2012
Rang de l'année	0	2	4	6	8	10	12
Production en tonnes	7 000	18 811	36 620	49 000	58 012	63 098	68 500

1. **a.** Déterminer le pourcentage d'augmentation de la production entre les années 2000 et 2012. On donnera le résultat arrondi sous la forme $a\,\%$ où a est un nombre entier.

   b. Déterminer un nombre réel positif qui est solution de l'équation :
   $x^{12} = 9,79$. Interpréter ce nombre en termes de taux d'évolution de la production de cette entreprise entre les années 2000 et 2012. On donnera le résultat arrondi sous la forme $b\,\%$ où b est un nombre entier.

2. L'entreprise fait appel à un cabinet d'experts pour modéliser l'évolution de la production de l'entreprise afin de faire une projection jusqu'en 2020. Le cabinet d'experts propose la fonction f définie sur l'intervalle $[2\,;\,20]$ par :

$$f(x) = 27\,131 \ln x + 0,626x^3$$

   où x représente le rang de l'année et $f(x)$ le nombre de tonnes produites.

   On compte le rang à partir de l'an 2000. Ainsi 2002 est le rang x = 2.

   a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;\,20]$. Déterminer $f'(x)$ puis les variations de la fonction f sur $[2\,;\,20]$.

   b. À l'aide de cette modélisation, l'entreprise peut-elle dépasser une production de 90 000 tonnes de papier recyclé avant l'année 2020 ? Justifier.

3. Une commande de bobines de papier de 2,20 m de large et pesant chacune environ 500 kg est faite à cette entreprise. Le poids d'une bobine varie en fonction de nombreux facteurs.

   Soit X la variable aléatoire qui à toute bobine choisie au hasard dans cette commande associe son poids. On admet que X suit une loi normale de paramètres $\mu = 500$ et $\sigma = 2$.

   a. Toute bobine dont le poids est inférieur à 496 kg est refusée.
   Quelle est la probabilité qu'une bobine choisie au hasard dans cette commande soit refusée ?
   Donner une valeur arrondie du résultat à 10^{-4}.

   b. L'entreprise perd de l'argent pour toute bobine dont le poids est supérieur à 506 kg.
   Quelle est la probabilité qu'une bobine choisie au hasard dans cette commande fasse perdre de l'argent à l'entreprise ? Donner une valeur arrondie du résultat à 10^{-4}.