Graphes probabilistes

Les exemples présentés sont extraits ou inspirés de sujets de baccalauréat.

1 Déterminer l'état stable : avec la calculatrice

Conjecture de l'état stable

La calculatrice permet de faire une conjecture sur la valeur de l'état stable ou de vérifier ses calculs mais ce n'est pas une preuve suffisante. Pour la justification, on utilisera les matrices ou les suites.

Point de cours : Soit M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre k. Si P_0 est la matrice ligne décrivant l'état initial et P_n l'état probabiliste à l'étape n, alors $P_n = P_0 \times M^n$.

Pour conjecturer l'état stable, il suffit de faire le calcul de $P_n = P_0 \times M^n$ pour une grande valeur (mais raisonnable) de n. A partir de $n = 30$ ou $n = 50$ on obtient souvent une très bonne approximation...

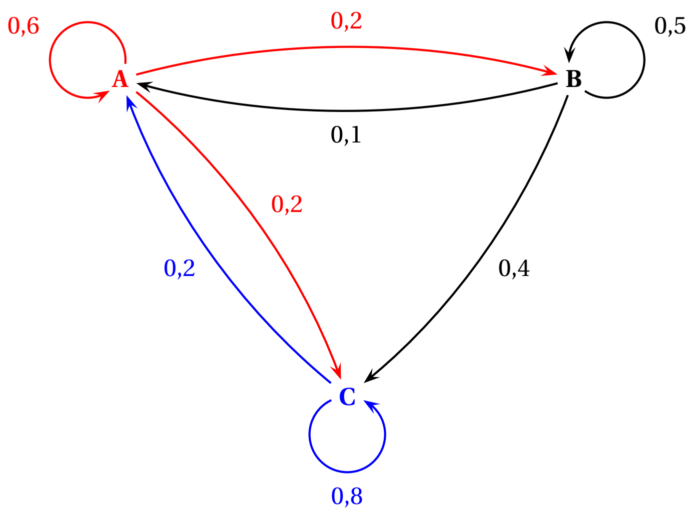
Exemple 1. **[d'après Pondichéry - Avril 2015]**

Les sites internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut, à toutes les minutes, soit y rester soit utiliser un lien vers un des deux autres sites.

- Pour un internaute sur le site A, la probabilité d'utiliser le lien vers B est de 0,2 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,2.
- Pour un internaute sur le site B, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,1 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,4.
- Pour un internaute sur le site C, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,2 mais il n'y a pas de lien direct avec B.

L'unité de temps est la seconde, et à un instant $t = 0$, la proportion de visiteurs est, respectivement sur les sites A, B et C : 1, 0 et 0.
L'état probabiliste à au bout de n secondes est donné par une matrice ligne P_n ; ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Le graphe probabiliste correspondant à cette situation est :



- La matrice M de transition associée à ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

- Ainsi par exemple, l'état probabiliste à l'étape 3 est :

  $P_3 = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix} 0,346 & 0,194 & 0,46 \end{pmatrix}$ (résultat obtenu à l'aide de la calculatrice), ce qui signifie qu'au bout de trois secondes, la probabilité qu'un utilisateur soit connecté sur le site A est 0,346, sur le site B 0,194 et sur le site C 0,46.

- Pour faire une conjecture sur cet état probabiliste au bout d'un grand nombre de secondes, on peut par exemple calculer $P_{50} = P_0 \times M^{50} \approx \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \end{pmatrix}$.

  On peut donc penser que les proportions d'internautes sur les sites A, B et C se stabiliseront respectivement vers 31,25%, 12,5% et 56,25%.

- On obtient à la calculatrice :

  $\begin{pmatrix} 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \end{pmatrix}$ ce qui confirme que nous avons bien trouvé un état stable car il vérifie $P = P \times M$

Remarque 1 : Dans la majorité des cas, nous travaillerons avec des graphes probabilistes d'ordre 2, conformément aux résultats de notre cours.

2 Avec les matrices

graphe probabiliste d'ordre 2

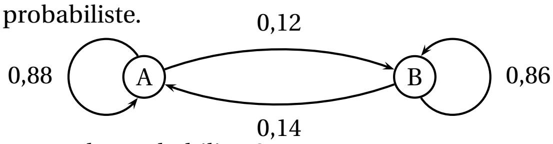
Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice de transition ne comporte pas de 0, l'état P_n à l'étape n converge vers un état P indépendant de l'état initial P_0. P est appelé état stable et vérifie $P = P \times M$.

Exemple 2. **[d'après Liban - juin 2017]**

Deux opérateurs Alpha et Bravo se partagent le marché de la téléphonie mobile dans un pays.
En 2015, l'opérateur Alpha possède 30 % du marché de téléphonie mobile. Le reste appartient à l'opérateur Bravo.
On étudie l'évolution dans le temps du choix des abonnés de 2015 pour l'un ou l'autre des opérateurs. Chaque abonné conserve un abonnement téléphonique, soit chez l'opérateur Alpha soit chez l'opérateur Bravo.
On estime que, chaque année :

- 12 % des abonnés de l'opérateur Alpha le quittent et souscrivent un abonnement chez l'opérateur Bravo.
- 86 % des abonnés de l'opérateur Bravo lui restent fidèles, les autres le quittent pour l'opérateur Alpha.

1. Modéliser la situation par un graphe probabiliste.



2. Quelle est la matrice de transition de ce graphe probabiliste ?

$M = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$

3. On note pour tout entier naturel n :

- a_n la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Alpha l'année $2015+n$;
- b_n la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Bravo l'année $2015+n$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2015+n$.

a) Quel est l'état initial P_0 ? L'état initial est $P_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$

b) Montrer qu'en 2018, il y aura environ 44,2 % des abonnés chez l'opérateur Alpha : L'état probabiliste pour 2018 est donné par :

$P_3 = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}^3 \approx \begin{pmatrix} 0,442 & 0,558 \end{pmatrix}$.

En suivant ce modèle, il y aura donc environ 44,2% des abonnés chez Alpha.

c) Montrer que l'état probabiliste converge vers un état stable $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$. Déterminer P et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Remarque 2 : : Ce n'est pas demandé mais le calcul de $P_{50} = P_0 \times M^{50} \approx \begin{pmatrix} 0,538 & 0,462 \end{pmatrix}$ permet d'obtenir une bonne approximation du résultat attendu et permettra de vérifier nos calculs...

La matrice de transition de ce graphe probabiliste d'ordre 2 est $M = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$. Elle ne comporte pas de 0 donc l'état probabiliste P_n à l'étape n converge vers un état stable P qui est indépendant de l'état initial P_0 et qui vérifie $P = P \times M$.
On note $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ donc :

$$\begin{aligned} P = P \times M &\iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,88x + 0,14y & 0,12x + 0,86y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x = 0,88x + 0,14y \\ y = 0,12x + 0,86y \end{cases} \end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait que $x + y = 1$. On conserve la première équation du système (les deux équations sont équivalentes) et on en déduit :

$$\begin{cases} x = 0,88x + 0,14y \\ x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0,12x - 0,14y = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \iff \begin{cases} 0,12x - 0,14(1-x) = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \iff \begin{cases} 0,26x - 0,14 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{0,14}{0,26} = \frac{7}{13} \\ y = 1 - \frac{7}{13} = \frac{6}{13} \end{cases}$$

L'état stable est donc $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{13} & \frac{6}{13} \end{pmatrix}$

Dans un grand nombre d'années, les proportions d'abonnés chez Alpha et Bravo se stabiliseront respectivement autour de $\dfrac{7}{13}$ et $\dfrac{6}{13}$.

Remarque 3 : On remarque que $\dfrac{7}{13} \approx 0,538$ ce qui est cohérent avec le résultat obtenu par le calcul de P_{50}...

3 Avec les suites

Suites arithmético-géométriques

Cette méthode, parfois rencontrée dans les sujets de bac (mais plus rarement que la précédente) utilise les suites numériques, travaillées dans le programme du tronc commun.

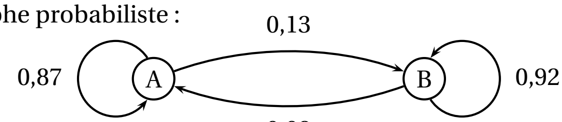
Exemple 3. **[d'après N[lle] Calédonie Wallis et Futuna - Novembre 2017]**

En 2012, un village ne comptait qu'un seul médecin, Albert.
Début 2013, un nouveau médecin, Brigitte, s'installe dans ce village.
À l'arrivée de Brigitte, 90 % des habitants du village choisirent Albert comme médecin, les autres choisirent Brigitte.
On suppose que chaque habitant du village est patient du même médecin, Albert ou Brigitte, tout au long d'une année.
On observe, à partir de 2013, que chaque année :

- 13 % des patients d'Albert changent de médecin et deviennent des patients de Brigitte;
- 8 % des patients de Brigitte deviennent des patients d'Albert.

On choisit au hasard un habitant de ce village. Pour tout entier naturel n,
a_n est la probabilité que cet habitant soit un patient d'Albert pour l'année (2013+n),
b_n est la probabilité que cet habitant soit un patient de Brigitte pour l'année (2013+n),
$\mathrm{P}_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ est la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $(2013+n)$.

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial : $\mathrm{P}_0 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste :



3. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe : $\begin{pmatrix} 0,87 & 0,13 \\ 0,08 & 0,92 \end{pmatrix}$
4. Calculer P_4 : $\mathrm{P}_4 = \mathrm{P}_0 \times \mathrm{M}^4 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,87 & 0,13 \\ 0,08 & 0,92 \end{pmatrix}^4 \approx \begin{pmatrix} 0,583 & 0,417 \end{pmatrix}$
5. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0,79a_n + 0,08$

   $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{P}_n \times \mathrm{M} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,87 & 0,13 \\ 0,08 & 0,92 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,87a_n + 0,08b_n & 0,13a_n + 0,92b_n \end{pmatrix}$

   On peut en déduire que : $a_{n+1} = 0,87a_n + 0,08b_n$. De plus, on sait que $a_n + b_n = 1$ d'où :

   $a_{n+1} = 0,87a_n + 0,08(1-a_n) = 0,87a_n + 0,08 - 0,08a_n = 0,79a_n + 0,08$.

   On retrouve bien l'égalité demandée.
6. Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = a_n - \dfrac{8}{21}$

   a) Montrer (u_n) est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - \frac{8}{21} \\ &= 0,79a_n + 0,08 - \frac{8}{21} \quad \text{mais} \quad u_n = a_n - \frac{8}{21} \Longleftrightarrow a_n = u_n + \frac{8}{21} \\ &= 0,79\left(u_n + \frac{8}{21}\right) + 0,08 - \frac{8}{21} \\ &= 0,79u_n + \underbrace{0,79 \times \frac{8}{21} + 0,08 - \frac{8}{21}}_{=0} \\ &= 0,79u_n \end{aligned}$$

   donc (u_n) est géométrique de raison $0,79$ et de premier terme :
   $u_0 = a_0 - \dfrac{8}{21} = 0,9 - \dfrac{8}{21} = \dfrac{109}{210}$

   b) Exprimer u_n puis a_n en fonction de n.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = \dfrac{109}{210} \times 0,79^n$ donc $a_n = u_n + \dfrac{8}{21} = \dfrac{109}{210} \times 0,79^n + \dfrac{8}{21}$

Jamais de valeurs approchées !
Penser à utiliser la calculatrice pour les fractions :
$\boxed{\text{math}}$ puis 1 :▸Frac
Vive les fractions !

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

$-1 < 0,79 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,79^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{8}{21}$.

d) Quel est l'état stable ?

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{8}{21}$ et $b_n = 1 - a_n$ donc $\mathrm{P}_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ converge vers $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{8}{21} & \dfrac{13}{21} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,381 & 0,619 \end{pmatrix}$

A long terme, la probabilité qu'un habitant choisisse Albert est environ 0,391 et la probabilité qu'il choisisse Brigitte est environ 0,619.

Remarque 4 : La calculatrice donne $\mathrm{P}_{50} \approx \begin{pmatrix} 0,381 & 0,619 \end{pmatrix}$ ce qui est cohérent avec le résultat précédent.

Remarque 5 : Le même résultat aurait été trouvé avec la méthode matricielle.