RALLYE MATHEMATIQUE DU CENTRE
2009

CONSIGNES pour l'épreuve d'entraînement

Date : à partir du 1er décembre 2008
Durée : 1h 30 min.
Matériel autorisé : *Règle, compas, équerre, calculatrice, rapporteur, dictionnaire, ciseaux, colle, feuilles de brouillon, calque, trombones, agrafeuse, crayons de couleur ou feutres et feuilles à petits carreaux.*

Déroulement de l'épreuve :

Le matériel doit être dans la salle dès le début de l'épreuve.
Les élèves ne doivent pas aller chercher des informations à l'extérieur après le début de l'épreuve.
Elle doit avoir lieu dans une salle de classe (CDI exclu) permettant l'organisation du travail d'équipe.

Rôle du professeur :

Ce rôle est essentiel lors de cette épreuve d'entraînement.
Le professeur veillera notamment :

- à aider la classe à s'organiser afin d'obtenir un véritable travail d'équipe (constitution des groupes, confrontation des idées et des méthodes, critique des solutions...) ;
- à sensibiliser les élèves à la qualité de la rédaction, élément largement pris en compte dans la notation de l'épreuve définitive (les réponses doivent être justifiées, la présentation soignée...) ;
- à ne pas laisser les groupes sécher sur leur problème (rien ne lui interdit de proposer des pistes…).

Dossier réponse :

Les élèves constitueront eux-mêmes le dossier réponse, comme ils auront à le faire le jour de l'épreuve officielle.

- Chaque exercice sera rédigé sur une seule feuille-réponse portant le numéro de l'exercice.
- Un collage sur cette feuille est autorisé.
- Tout exercice non résolu donnera lieu à la remise d'une feuille numérotée correspondante avec la mention "NON RESOLU".

Evaluation de l'épreuve d'entraînement :

Afin de vous permettre de mieux exploiter auprès de vos élèves cette séance d'entraînement, nous vous proposons de corriger vous-même ce dossier.
A cet effet, vous trouverez ci-joint des éléments de correction.

Vous pourrez ainsi faire rapidement le bilan de l'épreuve avec vos élèves.

Bon courage et au 17 mars 2009 pour l'épreuve officielle

RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE

Épreuve préparatoire - éléments de correction

Décembre 2008

Exercice n°1 — L'exercice de l'année

Le plus grand entier positif de 2009 chiffres dont la somme des chiffres est 2009 est :

$$\underbrace{999...9}_{223 \text{ chiffres « 9 »}} \quad 2 \quad \underbrace{000...0}_{1785 \text{ chiffres « 0 »}}$$

Le plus petit entier positif de 2009 chiffres dont la somme des chiffres est 2009 est :

$$1 \quad \underbrace{000...0}_{1784 \text{ chiffres « 0 »}} \quad 1 \quad \underbrace{999...9}_{223 \text{ chiffres « 9 »}}$$

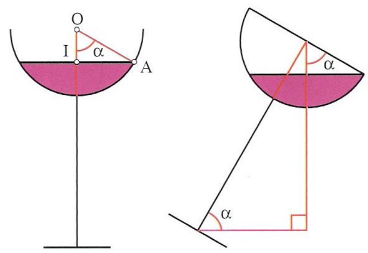
Exercice n°2 — Degré limité

$OI = 1,5$ et $OA = 3$.

$\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, donc $\alpha = 60^\circ$.

On peut donc incliner le verre de 30 ° par rapport à la verticale ;

La position du pied est alors à 60 ° par rapport à l'horizontale.



Exercice n°3 — Gare au radar !

❑ $91 + \dfrac{1}{11}$	❑ 110	❑ 90	❑ $111 + \dfrac{1}{9}$	■ $90 + \dfrac{10}{11}$

Exercice n°4 — « Epharant ... »

Situation 1 :
Les instants d'émission du phare A ont lieu avec un nombre de minutes pair , alors que les instants d'émission du phare B ont lieu avec un nombre de minutes impair.
Il n'y aura donc pas de coïncidence.

Situation 2 :
Soit t l'horaire de la 1ère émission du phare B. 5 h 48 min valent 348 min ;
t est tel que $348 = n \times 10 + t$ avec $0 \leqslant t < 9$; t est le reste de la division de 348 par 10 soit 8.
Le phare B émet pour la première fois à 0 h 08 min.

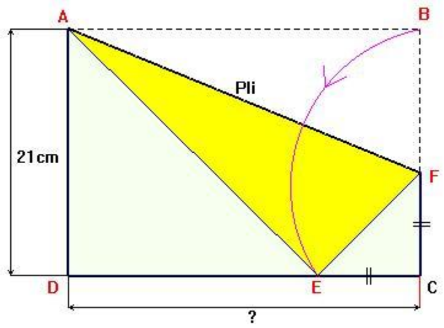
Situation 3 :
Phare A : 0 - 6 - 12 - 18 - $\boxed{24}$ - 30 - 36 - 42 - 48 - **54** - ...
Phare B : 4 - 14 - $\boxed{24}$ - 34 - 44 - **54** ...
L'heure de la 1ère coïncidence entre les deux phares est 0 h 24 min
Les coïncidences suivantes ont lieu toutes les 30 min (plus petit commun multiple de 6 et 10).
La dixième coïncidence a donc lieu 9×30 min après la première, c'est à dire à 4 h 54 min.
On peut compter toutes les 30 min entre 0 h 00 et 07 h 00 à partir de la première coïncidence à 0 h 24.
Ou bien, on recherche le plus grand entier n tel que $24 + n \times 30 \leqslant 7 \times 60$ d'où $n = 13$;
Il y aura donc eu 14 coïncidences entre 0 h et 7 h.

Situation 4 :
Soit x la période d'émission du phare B. 1 h 36 min = 96 min ;
x est tel que $96 = 5 + n \times x$ et $2 \leqslant x \leqslant 12$ donc $n \times x = 91 = 7 \times 13$ d'où $x = 7$.
La période d'émission du phare B est de 7 minutes.

Exercice n°5 — Anse de panier

1. Un programme de construction :
   (a) Dans le triangle ABH, construire le point I, pied de la hauteur issue de H.
   (b) La demi-droite $[IH)$ coupe le cercle de diamètre $[AB]$ en C.
   (c) Le cercle de centre H et de rayon HC coupe $[AH]$ en E et $[HB]$ en F.
   (d) La médiatrice de $[AE]$ coupe $[AI]$ en O_1.
   (e) La médiatrice de $[BF]$ coupe $[BI]$ en O_2.
   (f) Les deux médiatrices sont sécantes en O.
   (g) M est le milieu de $[AE]$ et N est le milieu de $[BI]$.
   (h) Tracer le cercle de centre O_1 et de rayon O_1A. Il coupe $[O_1M)$ en J. Ne conserver que l'arc $\widehat{AJ}$.
   (i) Tracer le cercle de centre O_2 et de rayon O_2B. Il coupe $[O_2N)$ en K. Ne conserver que l'arc $\widehat{BK}$.
   (j) Tracer l'arc de cercle $\widehat{JK}$ de centre O et de rayon OJ.

Exercice n°6 — Monopli



Méthode 1 :
Posons $x = EC = FC$.
ADE est un triangle rectangle en D et $\widehat{CEF} = 45°$, donc ADE est isocèle, donc $DE = 21$.
Dans le triangle ECF, rectangle et isocèle en C, on peut utiliser le théorème de Pythagore pour trouver $FE = x\sqrt{2}$.
Ainsi, $BF = FE = x\sqrt{2}$.

$BC = BF + FC = x\sqrt{2} + x$ d'où $x = \dfrac{21}{1+\sqrt{2}}$.

Conclusion : $DC = DE + EC = 21 + \dfrac{21}{1+\sqrt{2}} = 21\sqrt{2} \approx 29,7$ cm.

Méthode 2 :
Il est clair que $AB = AE$.
Or, ADE est un triangle rectangle en D et $\widehat{CEF} = 45°$, donc ADE est isocèle, donc $DE = 21$.
Dans le triangle ADE, rectangle et isocèle en D, on peut utiliser le théorème de Pythagore pour trouver $AE = 21\sqrt{2}$.
Conclusion : $AB = AE = 21\sqrt{2} \approx 29,7$ cm.

Exercice n°7 — Un exercice qui ne manque pas d'R

On cherche tous les rectangles R dont l'aire est égale à la somme des aires des deux rectangles A et B, ce qui revient à chercher tous les couples d'entiers $(X;Y)$ tels que $\boxed{4X + 2Y = XY}$.

Méthode experte :

$4X + 2Y = XY \iff (X-2)(Y-4) = 8$
Il y a quatre chemins pour écrire 8 comme produit de deux entiers : 1×8, 2×4, 4×2 et 8×1 qui correspondent aux solutions : les couples $(X;Y)$ sont (3 ; 12), (4 ; 8), (6 ; 6) et (10 ; 5).

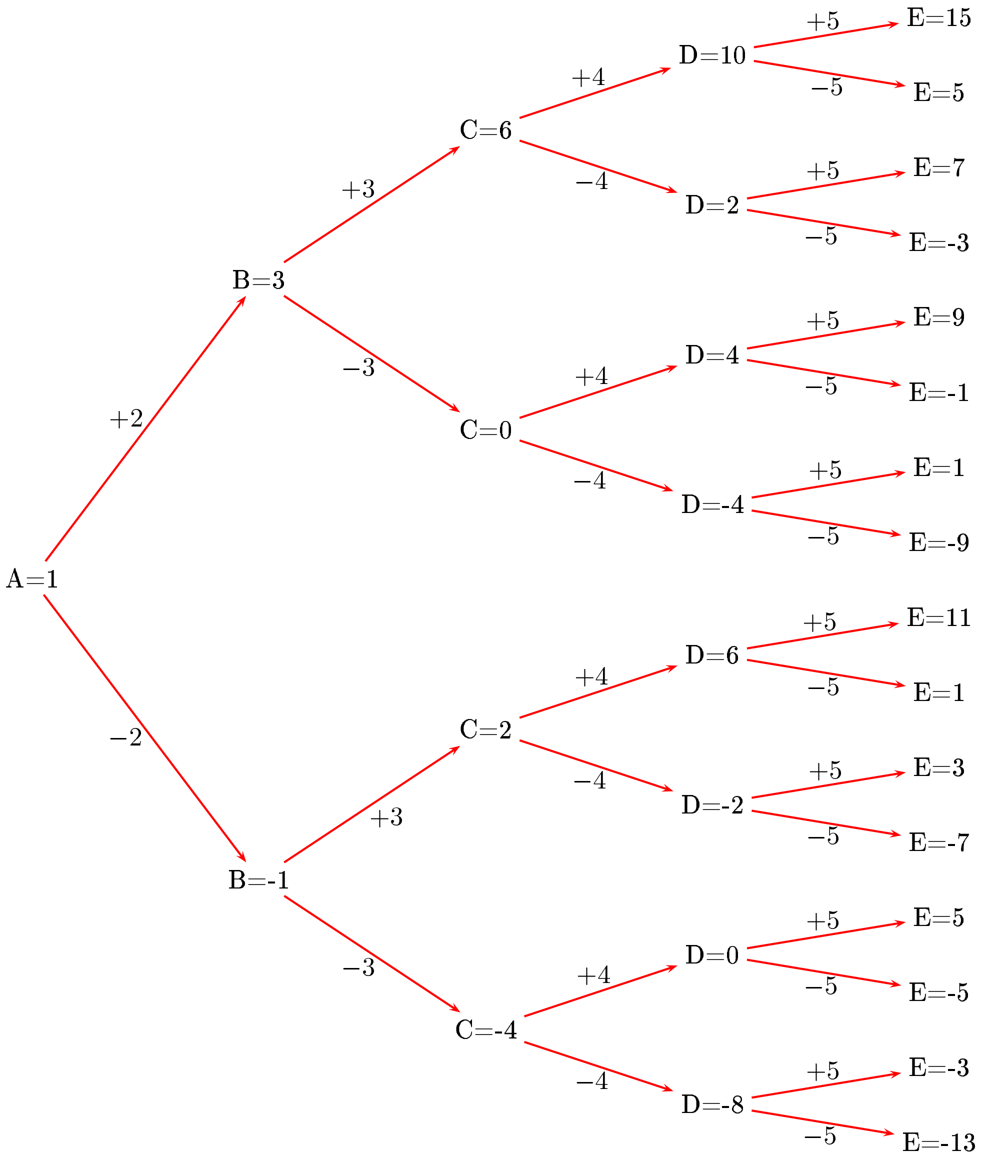
Méthode pour les élèves :

$4X + 2Y = XY \iff Y = \dfrac{4X}{X-2}$.
En utilisant le tableur de la calculatrice, on obtient le tableau ci-contre.

X	Y
0	0
1	-4
2	ERROR
3	**12**
4	**8**
5	6.67
6	**6**
7	5.6
8	5.33
9	5.14
10	**5**
11	4.89
12	4.8
13	4.73
14	4.67
15	4.62

Exercice n°8 — La farandole des $+$ et des $-$

On peut obtenir toutes les valeurs prises par E en faisant l'arbre suivant :



1. On peut obtenir 5 de deux manières différentes :
   $E = 1 + 2 + 3 + 4 - 5$ et $E = 1 - 2 - 3 + 4 + 5$
2. E peut prendre treize valeurs différentes :
   -13 -9 -7 (2) -5 -3 (2) -1 1 3 5 (2) 7 9 11 et 15
3. On a $F = E \pm 6$. Pour que F puisse être égale à 12, il faudrait que E puisse atteindre la valeur 6 ou la valeur 18, ce qui n'est pas le cas.
   Donc F ne peut pas être égal à 12.