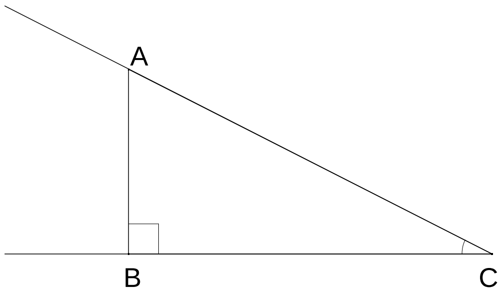
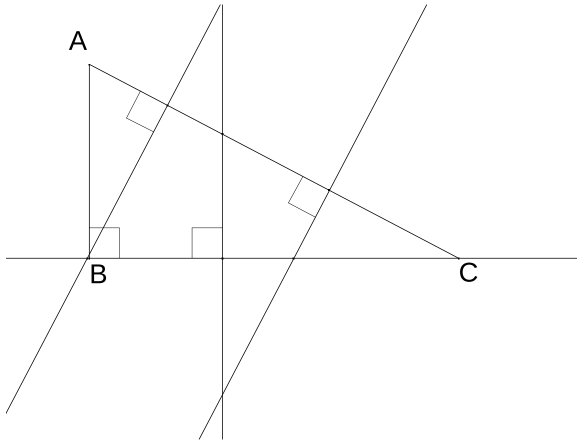
5.1. Angles et triangles rectangles.

5.2.1. Observations :

Si par un point situé sur le côté d'un angle aigu, on mène une perpendiculaire à l'autre côté, on obtient un triangle rectangle.
Pour un angle donné, tous les triangles ainsi construits sont semblables (car ils ont tous …….)





5.5.2 Construction des nombres trigonométriques

Dans les trois triangles rectangles semblables ainsi construits, observons :

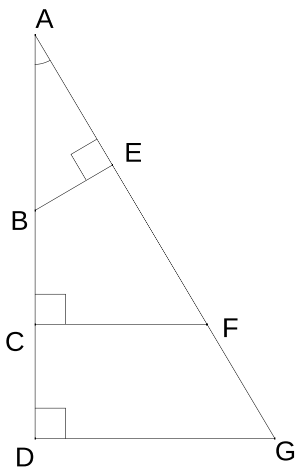
1^er rapport

- Triangles ADG et ACF

$\frac{\overline{AD}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}}$ par Thalès

- Dans les triangles ACF et AEB

$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}}$ (Triangles semblables)



Et donc en permutant les moyens :

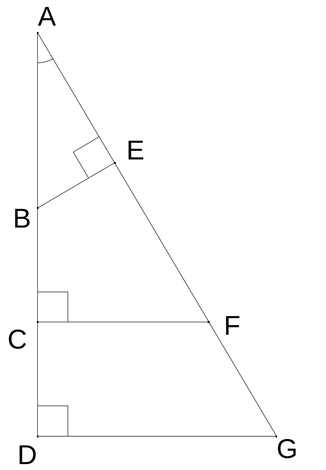
$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}}$

En résumé : $\boxed{\frac{\overline{AD}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{Coté\ adjacent\ de\ l'angle}{Hypoténuse}}$

En français:

Pour un angle donné A, dans tous les triangles rectangles construits ayant A comme angle aigu, le rapport entre le côté adjacent à l'angle et l'hypoténuse est constant.

2^ème^ rapport :



- Dans les triangles semblables ADG et ACF :

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AG}} \text{ et donc } \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{AG}} \text{ (en permutant…..)}$$

- Dans les triangles semblables ACF et AEB :

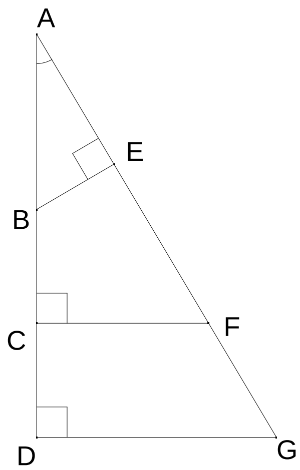
$$\frac{\overline{CF}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} \text{ et donc } \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}$$

En résumé : $\boxed{\frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{\text{cot}\,\acute{e}\ oppos\acute{e}\ \grave{a}\ l'angle}{Hypot\acute{e}nuse}}$

En français :

Pour un angle donné A, dans tous les triangles rectangles construits ayant A comme angle aigu, le rapport entre le côté opposé à l'angle et l'hypoténuse est constant.

3^ème^ rapport.



- Dans les triangles semblables ABE et AFC :

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \text{ et donc } \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AC}}$$

- Dans les triangles semblables AFC et AGD

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \text{ et donc } \frac{\overline{CF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{AD}}$$

En résumé : $\boxed{\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{AD}} = \frac{\text{cot}\,\acute{e}\ oppos\acute{e}\ \grave{a}\ l'angle}{\text{cot}\,\acute{e}\ adjacent\ \grave{a}\ l'angle}}$

En français

Pour un angle donné A, dans tous les triangles rectangles construits ayant A comme angle aigu, le rapport entre le côté opposé à l'angle et le côté adjacent à l'angle est constant.

5.2.3 Définitions et remarques

Dans tout triangle rectangle :

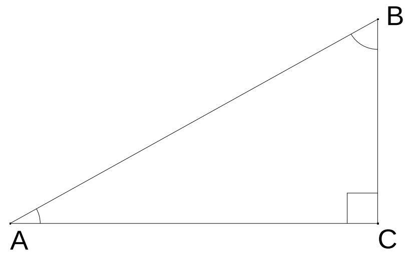
- **Le cosinus** d'un angle aigu est le rapport entre le côté adjacent à l'angle et l'hypoténuse
- **Le sinus** d'un angle aigu est le rapport entre le côté opposé à l'angle et l'hypoténuse
- **La tangente** d'un angle aigu est le rapport entre le côté opposé à l'angle aigu et le côté adjacent à l'angle

Complète :

$\cos \widehat{B} =$ $\qquad$ $\cos \widehat{A} =$

$\sin \widehat{B} =$ $\qquad$ $\sin \widehat{A} =$

$tg\,\widehat{B} =$ $\qquad$ $tg\,\widehat{A} =$



Conséquences :

1. Dans tout triangle rectangle, le sinus de chacun des angles aigus est égal au cosinus de l'autre angle aigu.

$$\boxed{\sin \widehat{A} = \cos \widehat{B} \quad et \quad \sin \widehat{B} = \cos \widehat{A}}$$

2. Dans tout triangle rectangle la tangente d'un angle aigu est égale au quotient du sinus de cet angle par son cosinus. A justifier.

$$\boxed{\frac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}} = tg\,\widehat{A}}$$

Remarques :

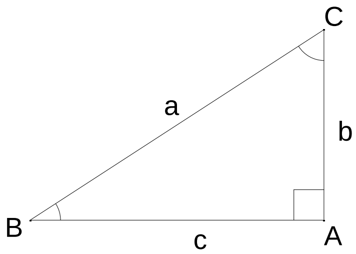
1. Si l'amplitude de l'angle est donnée en degrés, par exemple 17°, on écrira : cos 17°, sin17°, tg 17° (ou tan17°)

2. On note cos²Â au lieu de (cosÂ)² (même chose pour sin et tg)

3. Les nombres cos Â, sin Â et tg Â sont appelés les nombres trigonométriques de l'angle aigu Â

4. La trigonométrie est donc l'étude des relations entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle et les amplitudes de ses angles.

Petit exercice



a) sans calculatrice, complète le tableau suivant :

	1	2	3	4
a			10	
b	3	5		
c	4			8
Sin B		0.5		
Cos B			0.3	
Tan B				2
Sin C				
Cos C				
Tan C				

b) Fais de même en utilisant la calculatrice

	1	2	3	4
a			5	6
b	4	2		
c				
Sin B				
Cos B				
Tan B				
Sin C				
Cos C				
Tan C				
B		45°		30°
C	30°		60°	