Graphes probabilistes

▷ **Exercice 1.** Une municipalité vient de mettre en place le service « vélo en liberté ». Il s'agit d'un service de location de vélos à la journée. Les vélos sont disponibles sur deux sites A et B et doivent être ramenés en fin de journée indifféremment dans l'un des deux sites. Après une étude statistique, on considère que :

- si un vélo est loué sur le site A, la probabilité d'être ramené en A est $0,6$;
- si un vélo est loué sur le site B, la probabilité d'être ramené en B est $0,7$.

Les résultats numériques seront arrondis à 10^{-2} près.

1. En notant respectivement A et B les états « le vélo est en A » et « le vélo est en B », traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Donner M la matrice de transition de ce graphe en considérant les sommets dans l'ordre A, B.
3. Pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) la probabilité qu'un vélo quelconque soit, après n jours, sur le site A (respectivement sur le site B).
   On note P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste après n jours.
   Le premier jour, tous les vélos sont distribués également sur les deux sites. On a donc $\mathrm{P}_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

   a) On donne : $\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 0,48 & 0,52 \\ 0,39 & 0,61 \end{pmatrix}$.
   Calculer P_2 en donnant le détail des calculs matriciels.

   b) Calculer P_4 et interpréter le résultat dans le contexte du problème.

   c) Déterminer l'état stable du graphe, noté $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$.

   d) Tous les mois, un véhicule est affecté à la redistribution des vélos afin de rétablir au mieux la répartition initiale qui était de 70 vélos sur chaque site.
   La municipalité envisage d'affecter un véhicule pouvant contenir 12vélos.
   Ce choix parait-il adapté à la situation ?

▷ **Exercice 2.** Dans une grande entreprise, tous les agents commerciaux ont une voiture de fonction, qu'ils doivent choisir entre deux marques A et B. Le parc de véhicules (en location) est renouvelé tous les ans. On suppose que le nombre d'agents commerciaux de l'entreprise ne varie pas, et que les deux marques A et B restent les seules possibilités pour les voitures de fonction proposées dans l'entreprise. On a constaté que, chaque année :

- 5 % des agents commerciaux utilisant un véhicule de marque A changent l'année suivante pour B ;
- 15 % des agents commerciaux utilisant un véhicule de marque B changent l'année suivantes pour A ;
- les autres agents poursuivent l'année suivante avec un véhicule de même marque.

On appelle a_n la probabilité qu'un agent commercial choisi au hasard utilise un véhicule de marque A au début de l'année $2010+n$, et b_n la probabilité qu'il utilise un véhicule de marque B au début de cette même année. On note $\mathrm{P}_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010+n$.

En 2010, la moitié des agents commerciaux possédaient un véhicule de marque A ; ainsi : $\mathrm{P}_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, et donner la matrice de transition M (on considèrera les sommets du graphe dans l'ordre alphabétique).

2. Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}45 \end{pmatrix}$ et donner une interprétation concrète des coefficients de cette matrice.

3. Déterminer l'état probabiliste stable du système et interpréter les résultats obtenus.

4. a) Que vaut, pour tout entier naturel n, la somme $a_n + b_n$?
   b) On sait, pour tout entier naturel n, que $P_{n+1} = P_n \times M$; démontrer, pour tout entier naturel n, que $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}15$.

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = a_n - 0{,}75$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométriques de raison 0,8 dont on précisera le premier terme.
   b) Exprimer u_n en fonction de n, puis démontrer que pour tout entier naturel n,
   $$a_n = -0{,}25 \times 0{,}8^n + 0{,}75.$$
   c) Déterminer la limite de la suite (a_n). Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

▷ **Exercice 3.** Les employés d'une grande zone commerciale ont le choix entre deux types de restaurants : un « self » ou un restaurant « traditionnel » avec service à la place. On admet que tous les employés mangent chaque jour dans l'un des deux restaurants. On a constaté que :

- si un employé mange au « self » un jour donné, alors le lendemain il y mange également avec une probabilité de $0,8$;
- si un employé mange dans le restaurant « traditionnel » un jour donné, alors le lendemain il change pour le « self » avec une probabilité de $0,4$.

On choisit au hasard un employé de la zone commerciale.
Si n est un entier naturel non nul, on appelle s_n la probabilité que l'employé choisi mange au « self »le n-ième jour, et par $t_n = 1 - s_n$ la probabilité qu'il mange au restaurant « traditionnel » le n-ième jour.
Pour l'état initial, on admet que $s_1 = t_1 = 0,5$, c'est-à-dire que le premier jour, les probabilités de choix du « self » ou du restaurant « traditionnel » sont égales.
Dans la suite, pour tout entier naturel n non nul, on note P_n la matrice $P_n = (sn \quad t_n)$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.

2. Justifier l'égalité matricielle $P_{n+1} = P_n \times M$ où M désigne la matrice $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ et n un entier naturel non nul.

3. Déterminer la probabilité que l'employé tiré au sort mange au « self » le deuxième jour.

4. Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.

5. Démontrer que pour tout entier nature n non nul, on a : $s_{n+1} = \frac{2}{5}s_n + \frac{2}{5}$.

6. Dans la suite, pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = s_n - \frac{2}{3}$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et de premier terme $u_1 = -\frac{1}{6}$.

b) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, où n est un entier naturel non nul.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $s_n = -\frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$.

d) Déterminer la limite de la suite (s_n) quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

▷ **Exercice 4.** Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Cet exercice consiste à étudier la propagation d'une information d'une personne à l'autre, thème souvent abordé en sciences sociales. Cette information se transmet avec un risque d'erreur, c'est-à-dire avec une probabilité de propagation de l'information contraire.

On considère l'information suivante, notée E : « Paul a réussi son examen ».

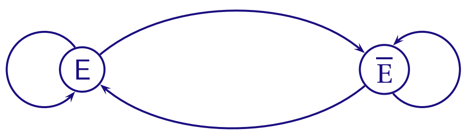
Partie A : Propagation symétrique (de type « neutre »)

Dans cette partie, on suppose que, pour une information reçue (E ou $\overline{\text{E}}$), la probabilité de communiquer cette information à l'identique vaut 0,9 et la probabilité de relayer l'information contraire vaut 0,1.

On note p_n la probabilité de recevoir l'information E au bout de n étapes (n étant le nombre de personnes ayant transmis l'information) et on note q_n la probabilité de recevoir l'information $\overline{\text{E}}$ au bout de n étapes.

On suppose que Paul a réussi son examen, on pose $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

1. Recopier puis compléter le graphe probabiliste relatif à la propagation de l'information suivant :



2. Préciser la matrice de transition M telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \text{M}$.

3. À l'aide de la calculatrice, trouver le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0,8$.

4. Déterminer par le calcul, l'état stable.

Partie B : Propagation asymétrique (de type « rumeur »)

Dans cette partie, on suppose toujours que la probabilité de transmission correcte de l'information E est égale à 0,9. Toutefois, il circule la fausse rumeur $\overline{\text{E}}$. Dans ces conditions, on suppose que si l'information reçue est $\overline{\text{E}}$, la probabilité de transmettre cette information $\overline{\text{E}}$ est égale à 1.

On suppose de nouveau que $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.

2. Préciser la matrice de transition N telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \text{N}$.

3. Montrer que $p_{n+1} = 0,9 p_n$. Quelle est la nature de la suite (p_n) ?

4. Exprimer p_n en fonction de n.

5. Trouver par le calcul, le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0,5$.

6. Déterminer la limite de (p_n) lorsque n tend vers $+\infty$ puis interpréter le résultat obtenu.

▷ **Exercice 5.** Pour jouer sur internet à un certain jeu la souscription d'un abonnement annuel est obligatoire. À partir d'un sondage, on prévoit que :

- 80 % des abonnés renouvellent chaque année leur abonnement,
- le nombre de nouveaux abonnés sera de 20 000 tous les ans.

1. Au premier janvier 2012, on comptait 50 000 abonnés à ce jeu en ligne.

Selon ce modèle, justifier qu'au premier janvier 2013 le nombre d'abonnés sera égal à 60 000.

2. a) Justifier que le nombre d'abonnés au premier janvier de l'année 2012 + n est modélisé par la suite (a_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & 50\,000 \\ a_{n+1} & = & 0,8a_n + 20\,000 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{array}\right.$$

b) Calculer a_2 et a_3.

c) Sur le graphique situé en annexe, à rendre avec la copie, on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormal les droites D d'équation $y = x$ et Δ d'équation $y = 0,8x + 20\,000$.

Sur l'axe des abscisses, représenter a_0 puis construire a_1, a_2, a_3, a_4 en utilisant les représentations graphiques des deux droites précédentes.

Laisser apparents les traits de construction.

d) En s'appuyant sur une observation graphique, émettre une conjecture sur la limite de la suite (a_n).

3. On admet que pour tout nombre entier naturel n, $a_n = 100\,000 - 50\,000 \times 0,8^n$.

a) Déterminer la limite de la suite (a_n).

b) *Toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

En utilisant ce modèle, donner une estimation de l'année à partir de laquelle, au premier janvier, le nombre d'abonnés à ce jeu sera supérieur à 95 000.

▷ **Exercice 6. Partie A :** Dans une résidence de vacances d'été, les touristes vont tous les jours à la plage. Ils disposent pour se déplacer de deux moyens de locomotion : un minibus ou des bicyclettes. Le séjour dure un mois pour tous les vacanciers.
Chaque jour, ils peuvent modifier leur choix de transport. Le premier jour, 80 % des touristes choisissent le minibus.
On considère qu'ensuite, chaque jour, 30 % de ceux qui ont pris le minibus la veille choisissent la bicyclette et 15 % des vacanciers qui avaient emprunté la bicyclette la veille, choisissent le minibus.
Soit n est un entier entre 1 et 31. On appelle $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice traduisant l'état probabiliste relatif au n-ième jour, où :
a_n représente la proportion des vacanciers choisissant le minibus le jour n ;
b_n représente la proportion des vacanciers choisissant la bicyclette le jour n.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.

2. Écrire la matrice de transition, notée M, associée à cette situation.

3. Déterminer l'état initial P_1.

4. a) Calculer P_2 (faire apparaître les calculs). Interpréter le résultat obtenu.

b) On suppose que $M^5 = \begin{pmatrix} 0,367 & 0,633 \\ 0,317 & 0,683 \end{pmatrix}$ et $M^6 = \begin{pmatrix} 0,352 & 0,648 \\ 0,324 & 0,676 \end{pmatrix}$, les coefficients ayant été arrondis au millième.

En utilisant la matrice qui convient, déterminer la répartition prévisible le 6^e jour. On donnera le résultat en pourcentage arrondi à 1 % près.

5. Soit $P= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état stable.

Déterminer x et y ; en donner une interprétation.

6. Montrer que pour n entier compris entre 1 et 30 on a $a_{n+1} = 0,55a_n + 0,15$.

Partie B : Pour n entier, $n \geqslant 1$, on définit la suite (u_n) par : $u_{n+1} = 0,55u_n + 0,15$ et $u_1 = 0,8$.

1. On pose $U_n = u_n - \dfrac{1}{3}$.

Montrer que la suite (U_n) est géométrique. On précisera la raison et le premier terme de cette suite.

2. Exprimer U_n puis u_n en fonction de n.

3. En déduire la limite de la suite (u_n). Quel résultat retrouve-t-on ?

▷ **Exercice 7.** Les sites internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut, à toutes les minutes, soit y rester soit utiliser un lien vers un des deux autres sites.

- Pour un internaute connecté sur le site A, la probabilité d'utiliser le lien vers B est de 0,2 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,2.
- Pour un internaute connecté sur le site B, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,1 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,4.
- Pour un internaute connecté sur le site C, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,2 mais il n'y a pas de lien direct avec B.

L'unité de temps est la minute, et à un instant $t = 0$, le nombre de visiteurs est, respectivement sur les sites A, B et C : 100, 0 et 0.
On représente la distribution des internautes sur les trois sites après t minutes par une matrice N_t ; ainsi $N_0 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On suppose qu'il n'y a ni déconnexion pendant l'heure (de $t = 0$ à $t = 60$) ni nouveaux internautes visiteurs.

1. Représenter le graphe probabiliste de sommets A, B et C correspondant à la situation décrite.

2. Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe (dans l'ordre A, B, C).

3. On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix}$ et $M^{20} \approx \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \end{pmatrix}$.

Calculer N_2. Interpréter le résultat obtenu.

4. Calculer $N_0 \times M^{20}$.

5. Conjecturer l'état stable et interpréter le résultat.

6. Un des internautes transmet un virus à tout site qu'il visitera.

   Il se connecte initialement sur le site C et commence sa navigation.

   À l'instant $t = 0$, le site C est donc infecté.

   a) Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté ?
   b) Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 2$ les trois sites soient infectés ?

▷ **Exercice 8.** Une étude statistique sur une population d'acheteurs a montré que :

- 90 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en utilisant internet affirment vouloir continuer à utiliser internet pour faire le suivant. Les autres personnes comptent faire leur prochain achat en magasin ;
- 60 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en magasin affirment vouloir continuer à effectuer le suivant en magasin. Les autres comptent effectuer leur prochain achat en utilisant internet.

Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. Une personne est choisie au hasard parmi les acheteurs. On note :

- a_n la probabilité que cette personne fasse son n-ième achat sur internet ;
- b_n la probabilité que cette personne fasse son n-ième achat en magasin.

On suppose de plus que $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.
On note $\text{P}_n = \begin{pmatrix} a_n & bn \end{pmatrix}$ l'état probabiliste correspondant au n-ième achat. Ainsi $\text{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On note :

- A l'état : « La personne effectue son achat sur internet » ;
- B l'état : « La personne effectue son achat en magasin ».

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. a) Calculer la matrice M^4.
   b) En déduire que la probabilité que la personne interrogée fasse son 5^e^ achat sur internet est égale à 0,812 5.
4. On note $\text{P} = (a \quad b)$ l'état stable associé à ce graphe.
   a) Déterminer a et b.
   b) À long terme, quelle est la probabilité que cette personne fasse ses achats sur internet ?
5. a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$
   b) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier naturel n non nul tel que $a_n \leqslant 0,801$.

Variables :	N est un entier naturel A est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à N la valeur 1 Affecter à A la valeur 1

Traitement :	Tant que . . .
	    Affecter à A la valeur $0,5 \times \text{A} + 0,4$
	    Affecter à N la valeur . . . .
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher N

   c) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme en sortie ?