Exercice 1

Étudier les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sin x}{x}$$

Exercice 2

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$.

1) Démontrer que $0 < g(x) \leqslant 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Démontrer que g est décroissante sur $[0 ; +\infty[$ et croissante sur $]-\infty ; 0]$.

3) Déterminer la limite (si elle existe) de la fonction g en $+\infty$, en $-\infty$ et en 0. (Expliquer le raisonnement)

Exercice 3

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{(x^2-1)(x-2001)}{2001}$$

Étudier la limite de g en $+\infty$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1 ; 2\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3-5x^2-x+6}{x^2-3x+2}$$

1. Soit $P(x) = 2x^3-5x^2-x+6$.

   Vérifier que 2 est racine de P, puis factoriser P par $x-2$.
2. Étudier la limite de f en 2.
3. Étudier la limite de f en $-\infty$.
4. Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe C représentant f.

Exercice 5

Déterminer les limites simples suivantes : (On justifiera en décomposant les fonctions)

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}+2x+3\right)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(3\sqrt{x}+x^2\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-5}{x}+x^2\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x}+3x^2-2\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to2^+} \left(\frac{3}{x-2}+5x+7\right)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to2^+} \left(\frac{2}{x+2}+\frac{1}{2}\right)$

Exercice 6

Déterminer les limites des fonctions polynômes suivantes : (On justifiera en décomposant les fonctions et en factorisant en cas d'indétermination)

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3+x)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+x)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^4-2x^3+5x+4)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^4-2x^3+5x+4)$

Exercice 7

Le but de cet exercice est de déterminer les limites en $-\infty$, $+\infty$, 3^- et 3^+ de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2-4x+2}{x-3}$$

Pour tout ce qui suit, on note $P(x) = x^2 - 4x + 2$, $Q(x) = x - 3$ et C_f la courbe représentant la fonction f.

1. Étude en $+\infty$ et en $-\infty$:
   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x)$. Peut-on conclure directement pour $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?
   b) Démontrer que, pour tout $x \neq 0$, on a : $f(x) = x\dfrac{1-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}$ (remarque anodine : $\dfrac{x^2}{x} = x$).
   c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   d) Y a-t-il une asymptote horizontale à la courbe C_f en $+\infty$? Et en $-\infty$? (Si oui, en donner une équation)
2. Étude au voisinage de 3 :
   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to3^+} P(x)$ et $\lim\limits_{x\to3^+} Q(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$.
   b) Procéder de même pour déterminer $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$.
   c) Que peut-on dire de la droite d'équation $x = 3$ pour la courbe C_f ?

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$.

1) Étudier la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (Très faisable)
2) Étudier la limite de f en 2^+ et en 2^-. (Plus difficile !)

Exercice 9

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{2}x^3$
3. $\lim\limits_{x\to0^+} x\sqrt{x}$
4. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{-6}{x^2}$

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, par : $f(x) = \dfrac{-x+1}{x+3}$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote horizontale dont on précisera l'équation.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote verticale dont on précisera l'équation.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+9x+2}{x^2+1}$

On note C_f sa représentation graphique.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx}{x^2+1}$
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
3. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à la courbe C_f.
4. Préciser la position relative de C_f et de Δ.

Exercice 12

Soit f la fonction définie pour $x \in [1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$.

Le but de l'exercice est d'étudier la limite de f en $+\infty$.

1. Démontrer que pour tous réels A et B strictement positifs, on a : $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$
2. En déduire que pour tout $x \in [1 ; +\infty[$ on a : $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.
3. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 13

1. Soient λ, μ des réels et k un réel non nul. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \lambda + \dfrac{k}{x-\mu}$.
   a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
   b) Démontrer que la courbe C_f représentant la fonction f admet une asymptote horizontale et une asymptote verticale dont on précisera les équations (en fonction de λ et μ). (Remarque : les courbes C_f sont des hyperboles)
2. Soient a, b, c et d des réels avec $c \neq 0$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ par : $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.
   a) Déterminer des réels λ, μ et λ tels que $f(x) = \lambda + \dfrac{k}{x-\mu}$.
   b) En déduire que la courbe C_f représentant la fonction f admet une asymptote horizontale et une asymptote verticale dont on précisera les équations (en fonction de a, c et d).