المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة الدار البيضاء الكبرى نيابة مولاي رشيد الثانوية التأهيلية جعفر الفاسي الفهري	**الإمتحان التجريبي** ماي **2009**	المستوى : الثانية باكالوريا الشعبة :العلوم الرياضية المادة : الرياضيات مدة الإنجاز :أربع ساعات المعامل : 9 إشراف : الأستاذ محمد نيفاس

بسم الله الرحمان الرحيم

مسألة

10 نقطة

لكل $n \in \mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بما يلي :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x)$$

وليكن (C_n) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ بحيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

الجزء الأول

نعتبر الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بما يلي : $h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{x+1}$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

1. أحسب $h_n(0)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to-1^+} h_n(x)$ — 0,75
2. أحسب $h_n'(x)$ لكل $x \in]-1;+\infty[$ وأعط جدول تغيرات الدالة واستنتج إشارتها . — 0,75

الجزء الثاني

1. أحسب $\lim\limits_{x\to-1^+} f_n(x)$ حسب قيم n وأعط تأولا هندسيا . — 0,75
2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ وأعط تأولا هندسيا . — 0,75
3. أحسب $f_n'(x)$ لكل $x \in]-1;+\infty[$ وأعط جدول تغيراتها (حسب قيم n). — 0,75
4. أدرس الوضع النسبي لـ (C_n) و (C_{n+1}) على المجال $]0;+\infty[$. — 0,5
5. أرسم في نفس المعلم (C_1) و (C_2) و (C_3) — 1,5

الجزء الثالث

1. بين أن المعادلة $f_n(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $]0;+\infty[$ — 0,25
2. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \alpha_n > 1$ — 0,25
3. بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تناقصية قطعا واستنتج أنها متقاربة . — 0,5
4. أ) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ (تذكر أن $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$) — 0,5

   ب) استنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1+\frac{1}{n})$ — 0,25

   ج) استنتج أن : $\exists p \in \mathbb{N} / \forall n \geq p : \alpha_n \leq 1+\frac{1}{n}$ $(e.\ln 2 \approx 1,88)$ — 0,5

   د) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$ — 0,25

الجزء الرابع

1. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall x > -1: \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$ — 0,25

2. استنتج أن $\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall x > -1: \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt$ — 0,5

3. بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^*; \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \le \frac{1}{n+1}$ — 0,5

4. استنتج $\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \right)$ — 0,5

4,5 نقط

التمرين الأول

نعرف على $\mathbb{C}$ قانون تركيب داخلي * المعرف كما يلي :

لكل $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ من $\mathbb{C}$: $z * z' = xx' + i(xy' + x'y)$

1. أ) بين أن تجميعي وتبادلي . — 0,5

ب) بين أن القانون " * " له عنصر محايد . — 0,25

ج) بين أن z له مماثل بالنسبة ل * إذا وفقط إذا كان $\mathrm{Re}(z) \neq 0$ — 0,5

د) بين أن $(\mathbb{C}^*; *)$ حلقة تبادلية و واحدية . — 0,5

2. نعتبر المجموعة $IK = \{ z \in \mathbb{C} / \exists z' \in \mathbb{C} : z * z' = 1 \}$ — 0,25

أ) بين أن $(IK; *)$ جزء مستقر في $(\mathbb{C}^*; *)$. — 0,25

ب) بين أن $(IK; *)$ زمرة .

3. نعتبر المجموعة التالية : $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) / a; b \in \mathbb{C} \right\}$

$\mathbb{C} \to E$

ونعتبر التطبيق $\varphi : z = a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*; *)$ نحو $(E; \times)$ (ضرب المصفوفات الإعتيادي) — 0,75

ب) تحقق أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}; +)$ نحو $(E; +)$ واستنتج بنية $(E; +; \times)$ (جمع وضرب المصفوفات الإعتيادي) — 0,5

ج) لتكن $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ بحيث $a \neq 0$ بين أن $(A - aI_2)^2 = O_2$ حيث $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — 0,25

د) استنتج A^{-1} ثم z' مماثل z بالنسبة للقانون * لكل z بحيث $\mathrm{Re}(z) \neq 0$ — 0,5

4. أ) بين أن $(E; +; .)$ فضاء متجهي حقيقي حيث " . " الجداء الخارجي الاعتيادي — 0,25

ب) حدد أساس للفضاء $(E; +; .)$ — 0,5

3نقط

التمرين الثاني

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ *المعادلة* : $(E): 7x-5y=18$

1. *أ) تحقق أن الزوج* $(4;2)$ *حلا للمعادلة* (E) — 0,25
   ب) حل المعادلة (E) — 0,5
2. *نضع* $\forall k \in \mathbb{Z}: (5k+4) \wedge (7k+2) = d_k$ — 0,5
   أ) بين أن $\forall k \in \mathbb{Z}: d_k \mid (k+8) \wedge 18$ — 0,5
   ب) حدد $c;b;a$ *و* d *أعداد نسبية بحيث* $5k+4 = a(k+8)+18b$ *و* $7k+2 = c(k+8)+18d$ — 0,5
   ج) استنتج أن $\forall k \in \mathbb{Z}: (7k+2) \wedge (5k+4) = (k+8) \wedge 18$ — 0,75
3. *حل في* $\mathbb{Z}^2$ *النظمة :* $(E'): \begin{cases} 7x-5y=18 \\ x \wedge y = 1 \end{cases}$

2,5 نقط

التمرين الثالث

يتوزع تلاميذ إحدى الثانويات حسب الشعب كما يلي :

30% آداب و 60% علوم تجريبية و 10% علوم رياضية .قمنا بإحصاء معدلات الدورة الأولى فكانت على التالي

- *60% من تلاميذ شعبة الآداب حصلوا على المعدل.*
- *75% من تلاميذ شعبة العلوم التجريبية على المعدل .*
- *95% من تلاميذ شعبة الرياضية على المعدل .*

اخترنا بصفة عشوائية أحد التلاميذ من الثانوية

1. *أ) ما هو احتمال بأن يكون التليمد من الآداب ؟* — 0,25
   ب) ما هو احتمال بأن يكون التليمد من العلوم التجريبية ؟ — 0,25
   ج) ما هو احتمال بأن يكون التليمد من العلوم الرياضية ؟ — 0,25
2. *أ) ما هو احتمال بأن يكون التليمد حاصل على المعدل و من شعبة الآداب* — 0,25
   ب) ما هو احتمال بأن يكون التليمد حاصل على المعدل و من شعبة العلوم التجريبية — 0,25
   ج) ما هو احتمال بأن يكون التليمد حاصل على المعدل و من شعبة العلوم الرياضية — 0,25
3. *ما هو احتمال بأن يكون التليمد حاصل على المعدل* — 0,5
4. *علما أن التلميد لم يحصل على المعدل فما هو احتمال بأن يكون من شعبة العوم الرياضية .* — 0,5

حظ موفق