Exercice 18

a. $sin\,2x = sin\, -\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\,, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = \pi + \dfrac{\pi}{6} + 2k'\pi\,, & k' \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi\,, & k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k'\pi\,, & k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Conclusion : $sin\,2x = -\dfrac{1}{2}$ admet $-\dfrac{5\pi}{12}$; $-\dfrac{\pi}{12}$; $\dfrac{7\pi}{12}$ et $\dfrac{11\pi}{12}$ pour solutions sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

b. $(cos\,x)^2 = 2sin\,x + 1$ et $(sin\,x)^2 + (cos\,x)^2 = 1$ donc

$$(cos\,x)^2 = 2sin\,x + 1 \Longleftrightarrow 1 - (sin\,x)^2 = 2sin\,x + 1 \Longleftrightarrow sin\,x(sin\,x - 2) = 0 \Longleftrightarrow sin\,x = 0 \quad ou \quad sin\,x - 2 = 0$$

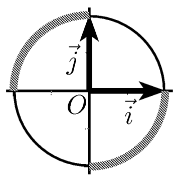
Or pour tout réel x, $sin\,x \leq 1$ donc $sin\,x - 2 = 0$ n'admet aucune solution et $sin\,x = 0$ pour $x = 0$ ou $x = \pi$ sur $]-\pi;\pi]$.

Conclusion : $(cos\,x)^2 = 2sin\,x + 1$ pour $x = 0$ ou $x = \pi$ sur $]-\pi;\pi]$

Exercice 19

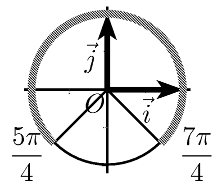
a. Sur $[0;2\pi[$, $cos\,x\,.\,sin\,x \leq 0$ si :

- $cos\,x \leq 0$ et $sin\,x \geq 0$ c'est à dire si $x \in \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$;
- $cos\,x \geq 0$ et $sin\,x \leq 0$ c'est à dire si $x \in \left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right[$;



Conclusion : $cos\,x\,.\,sin\,x \leq 0$ pour $x \in \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right[$.

b. $sin\,x \geq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x \in \left[0;\dfrac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{4};2\pi\right[$.



Exercice 20

D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EF}) &= (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE}) + (\overrightarrow{DE},\overrightarrow{EF}) && (2\pi)\\
&= (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}) + \underline{(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE})} + (\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EF}) + 4\pi && (2\pi)\\
&= \frac{5\pi}{6} - \frac{7\pi}{9} + \underline{(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DE})} + \frac{5\pi}{9} && (2\pi)\\
&= \frac{5\pi}{6} - \frac{7\pi}{9} + (\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}) - \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{9} && (2\pi)
\end{aligned}$$

Or, $2(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}) = -\pi$ soit $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}) = -\dfrac{\pi}{9}$ donc

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EF}) &= \frac{5\pi}{6} - \frac{7\pi}{9} - \frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{9} && (2\pi)\\
&= \frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{9} - \frac{\pi}{2} && (2\pi)\\
&= \frac{(5-2-3)\pi}{6} && (2\pi)\\
&= 0 && (2\pi)
\end{aligned}$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires donc les droites (AB) et (EF) sont parallèles.