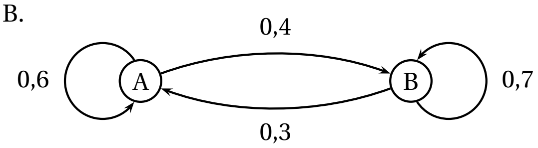
Graphes probabilistes

▷ **Exercice 1.** Une municipalité vient de mettre en place le service « vélo en liberté ». Il s'agit d'un service de location de vélos à la journée. Les vélos sont disponibles sur deux sites A et B et doivent être ramenés en fin de journée indifféremment dans l'un des deux sites. Après une étude statistique, on considère que :

- si un vélo est loué sur le site A, la probabilité d'être ramené en A est $0,6$;
- si un vélo est loué sur le site B, la probabilité d'être ramené en B est $0,7$.

Les résultats numériques seront arrondis à 10^{-2} près.

1. En notant respectivement A et B les états « le vélo est en A » et « le vélo est en B », traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B.



2. Donner M la matrice de transition de ce graphe en considérant les sommets dans l'ordre A, B.

$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

3. Pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) la probabilité qu'un vélo quelconque soit, après n jours, sur le site A (respectivement sur le site B).

On note P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste après n jours.

Le premier jour, tous les vélos sont distribués également sur les deux sites. On a donc $\mathrm{P}_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

a) On donne : $\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 0,48 & 0,52 \\ 0,39 & 0,61 \end{pmatrix}$. Calculer P_2 en donnant le détail des calculs matriciels.

$\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_0 \times \mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,48 & 0,52 \\ 0,39 & 0,61 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \times 0,48 + 0,5 \times 0,39 & 0,5 \times 0,52 + 0,5 \times 0,61 \end{pmatrix}$

d'où $\mathrm{P}_2 = \begin{pmatrix} 0,435 & 0,565 \end{pmatrix}$

b) Calculer P_4 et interpréter le résultat dans le contexte du problème.

On obtient à l'aide la calculatrice : $\mathrm{P}_4 = \mathrm{P}_0 \times \mathrm{M}^4 = \begin{pmatrix} 0,42915 & 0,57085 \end{pmatrix}$

Ainsi, la probabilité qu'un vélo soit sur le site A au bout de 4 jours est environ $0,429$ et la probabilité qu'il soit sur le site B est environ $0,571$.

c) Déterminer l'état stable du graphe, noté $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$.

Remarque 1 : : Ce n'est pas demandé mais le calcul de $\mathrm{P}_{80} = \mathrm{P}_0 \times \mathrm{M}^{80} \approx \begin{pmatrix} 0,429 & 0,571 \end{pmatrix}$ permet d'obtenir une bonne approximation du résultat attendu et permettra de vérifier nos calculs...

La matrice de transition de ce graphe probabiliste d'ordre 2 est $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$. Elle ne comporte pas de 0 donc l'état probabiliste P_n à l'étape n converge vers un état stable P qui est indépendant de l'état initial P_0 et qui vérifie $\mathrm{P} = \mathrm{P} \times \mathrm{M}$.

On note $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{P} = \mathrm{P} \times \mathrm{M} &\iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6a + 0,3b & 0,4a + 0,7b \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a = 0,6a + 0,3b \\ b = 0,4a + 0,7b \end{cases} \end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait que $a + b = 1$. On conserve la première équation du système (les deux équations sont équivalentes) et on en déduit :

$$\begin{cases} a = 0,6a + 0,3b \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0,4a - 0,3b = 0 \\ b = 1 - a \end{cases} \iff \begin{cases} 0,4a - 0,3(1-a) = 0 \\ b = 1 - a \end{cases} \iff \begin{cases} 0,7a - 0,3 = 0 \\ b = 1 - a \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7} \\ b = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7} \end{cases}$$

L'état stable est donc $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$

Dans un grand nombre de jours, les probabilités qu'un vélo se trouve en A ou en B se stabilisent autour de $\dfrac{3}{7}$ et $\dfrac{4}{7}$

Remarque 2 : $\dfrac{3}{7} \approx 4,429$ et $\dfrac{4}{7} \approx 0,571$ donc notre conjecture est bien vérifiée.

d) Tous les mois, un véhicule est affecté à la redistribution des vélos afin de rétablir au mieux la répartition initiale qui était de 70 vélos sur chaque site.

La municipalité envisage d'affecter un véhicule pouvant contenir 12vélos. Ce choix parait-il adapté à la situation ?

Il y a 140 vélos donc dans un grand nombre de jours, le nombre de vélos en B sera égal à $\frac{4}{7} \times 140 = 80$ il faudra donc en ramener 10 vers A. Le choix de la municipalité est donc cohérent.

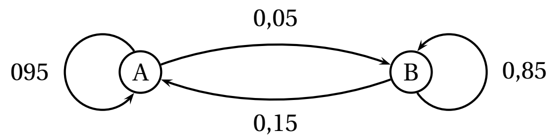
▷ **Exercice 2.** Dans une grande entreprise, tous les agents commerciaux ont une voiture de fonction, qu'ils doivent choisir entre deux marques A et B. Le parc de véhicules (en location) est renouvelé tous les ans. On suppose que le nombre d'agents commerciaux de l'entreprise ne varie pas, et que les deux marques A et B restent les seules possibilités pour les voitures de fonction proposées dans l'entreprise. On a constaté que, chaque année :

- 5 % des agents commerciaux utilisant un véhicule de marque A changent l'année suivante pour B ;
- 15 % des agents commerciaux utilisant un véhicule de marque B changent l'année suivantes pour A ;
- les autres agents poursuivent l'année suivante avec un véhicule de même marque.

On appelle a_n la probabilité qu'un agent commercial choisi au hasard utilise un véhicule de marque A au début de l'année $2010 + n$, et b_n la probabilité qu'il utilise un véhicule de marque B au début de cette même année. On note $\mathrm{P}_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010 + n$.

En 2010, la moitié des agents commerciaux possédaient un véhicule de marque A ; ainsi : $\mathrm{P}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, et donner la matrice de transition M (on considèrera les sommets du graphe dans l'ordre alphabétique).



$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

2. Justifier que $\mathrm{P}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}45 \end{pmatrix}$ et donner une interprétation concrète des coefficients de cette matrice.

$$\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_0 \times \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \times 0,95 + 0,5 \times 0,15 & 0,5 \times 0,05 + 0,5 \times 0,85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \end{pmatrix}$$

Dans un an, la probabilité qu'un employé choisisse un modèle A est 0,55 et la probabilité qu'il choisisse un modèle B est 0,45.

3. Déterminer l'état probabiliste stable du système et interpréter les résultats obtenus.

La matrice de transition de ce graphe probabiliste d'ordre 2 est $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$. Elle ne comporte pas de 0 donc l'état probabiliste P_n à l'étape n converge vers un état stable P qui est indépendant de l'état initial P_0 et qui vérifie $\mathrm{P} = \mathrm{P} \times \mathrm{M}$.

On note $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{P} = \mathrm{P} \times \mathrm{M} &\iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95a + 0,15b & 0,05a + 0,85b \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a = 0,95a + 0,15b \\ b = 0,05a + 0,85b \end{cases} \end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait que $a + b = 1$. On conserve la première équation du système (les deux équations sont équivalentes) et on en déduit :

$$\begin{cases} a = 0,95a + 0,15b \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0,05a - 0,15b = 0 \\ b = 1 - a \end{cases} \iff \begin{cases} 0,05a - 0,15(1-a) = 0 \\ b = 1 - a \end{cases} \iff \begin{cases} 0,2a - 0,15 = 0 \\ b = 1 - a \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{0{,}15}{0{,}2} = \frac{3}{4} \\ b = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

L'état stable est donc $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Dans un grand nombre de jours, les probabilités qu'un agent commercial choisisse un véhicule de type A ou de type B se stabilisent autour de $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{4}$

4. a) Que vaut, pour tout entier naturel n, la somme $a_n + b_n$?

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = 1$.

b) On sait, pour tout entier naturel n, que $P_{n+1} = P_n \times M$; démontrer, pour tout entier naturel n, que $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}15$.

$$\begin{aligned}
& P_{n+1} = P_n \times M \\
\iff & \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95a_n + 0,15b_n & 0,05a_n + 0,85b_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$a_{n+1} = 0,95a_n + 0,15b_n = 0,95a_n + 0,15(1 - a_n) = 0,95a_n + 0,15 - 0,15a_n = 0,8a_n + 0,15$

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = a_n - 0{,}75$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométriques de raison 0,8 dont on précisera le premier terme.

$$\begin{aligned}
\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} &= a_{n+1} - 0{,}75 \\
&= 0,8a_n + 0,15 - 0,75 \\
&= 0,8a_n - 0,6 \quad \text{mais} \quad u_n = a_n - 0{,}75 \iff a_n = u_n + 0{,}75 \\
&= 0,8(u_n + 0{,}75) - 0,6 \\
&= 0,8u_n + 0,8 \times 0{,}75 - 0,6 \\
&= 0,8u_n
\end{aligned}$$

On peut en déduire que (u_n) est géométrique de raison $0,8$ et de premier terme $u_0 = a_0 - 0,75 = 0,5 - 0,75 = -0,25$

b) Exprimer u_n en fonction de n, puis démontrer que pour tout entier naturel n,

$$a_n = -0{,}25 \times 0{,}8^n + 0{,}75.$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = -0,25 \times 0,8^n$ donc $a_n = u_n + 0,75 = -0,25 \times 0,8^n + 0,75$

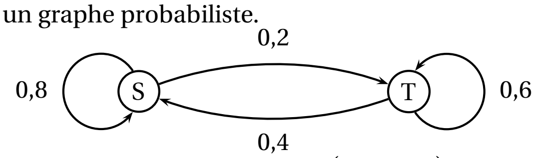
c) Déterminer la limite de la suite (a_n). Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?
$-1 < 0,8 < 1$ donc par théorème, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0,75$.
On retrouve la probabilité, déterminée à l'aide de l'état stable, qu'un agent choisisse un véhicule de type A au bout d'un grand nombre d'années.

▷ **Exercice 3.** Les employés d'une grande zone commerciale ont le choix entre deux types de restaurants : un « self » ou un restaurant « traditionnel » avec service à la place. On admet que tous les employés mangent chaque jour dans l'un des deux restaurants. On a constaté que :

- si un employé mange au « self » un jour donné, alors le lendemain il y mange également avec une probabilité de $0,8$;
- si un employé mange dans le restaurant « traditionnel » un jour donné, alors le lendemain il change pour le « self » avec une probabilité de $0,4$.

On choisit au hasard un employé de la zone commerciale.
Si n est un entier naturel non nul, on appelle s_n la probabilité que l'employé choisi mange au « self » le n-ième jour, et par $t_n = 1 - s_n$ la probabilité qu'il mange au restaurant « traditionnel » le n-ième jour.
Pour l'état initial, on admet que $s_1 = t_1 = 0,5$, c'est-à-dire que le premier jour, les probabilités de choix du « self » ou du restaurant « traditionnel » sont égales.
Dans la suite, pour tout entier naturel n non nul, on note P_n la matrice $P_n = (s_n \quad t_n)$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.



2. Justifier l'égalité matricielle $P_{n+1} = P_n \times M$ où M désigne la matrice $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ et n un entier naturel non nul.

P_{n+1} désigne l'état probabiliste le $(n+1)-$ième jour et M est la matrice de transition de ce graphe probabiliste donc on a bien, $P_{n+1} = P_n \times M$

3. Déterminer la probabilité que l'employé tiré au sort mange au « self » le deuxième jour.

Avec les notations précédentes, $P_2 = P_1 \times M = (s_1 \quad t_1) \times M = (0,5 \quad 0,5) \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = (0,6 \quad 0,4)$

donc la probabilité que l'employé tiré au sort mange au « self » le deuxième jour est égale à 0,6.

4. Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.

La matrice de transition de ce graphe probabiliste d'ordre 2 est $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$. Elle ne comporte pas de 0 donc l'état probabiliste P_n à l'étape n converge vers un état stable P qui est indépendant de l'état initial P_1 et qui vérifie $P = P \times M$.
On note $P = \begin{pmatrix} s & t \end{pmatrix}$ donc :

$$\begin{aligned} P = P \times M &\iff \begin{pmatrix} s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8s + 0,4t & 0,2s + 0,6t \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} s = 0,8s + 0,4t \\ t = 0,2s + 0,6t \end{cases} \end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait que $s + t = 1$. On conserve la première équation du système (les deux équations sont équivalentes) et on en déduit :
$\begin{cases} s = 0,8s + 0,4t \\ s + t = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0,2s - 0,4t = 0 \\ t = 1 - s \end{cases} \iff \begin{cases} 0,2s - 0,4(1-s) = 0 \\ t = 1 - s \end{cases} \iff \begin{cases} 0,6s - 0,4 = 0 \\ t = 1 - s \end{cases} \iff \begin{cases} s = \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3} \\ t = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$
L'état stable est donc $\begin{pmatrix} s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
Dans un grand nombre de jours, les probabilités qu'un employé choisisse le self ou le restaurant se stabilisent respectivement autour de $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{1}{3}$

5. Démontrer que pour tout entier nature n non nul, on a : $s_{n+1} = \dfrac{2}{5}s_n + \dfrac{2}{5}$.

$$\begin{aligned} P_{n+1} = P_n \times M &\iff (s_{n+1} \quad t_{n+1}) = (s_n \quad t_n) \times M \\ &\iff (s_{n+1} \quad t_{n+1}) = (s_n \quad t_n) \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \\ &\iff (s_{n+1} \quad t_{n+1}) = (0,8s_n + 0,4t_n \quad 0,2s_n + 0,6t_n) \end{aligned}$$

d'où $s_{n+1} = 0,8s_n + 0,4t_n$ mais comme $t_n = 1 - s_n$ alors $s_{n+1} = 0,8s_n + 0,4(1 - s_n) = 0,4s_n + 0,4 = \dfrac{2}{5}s_n + \dfrac{2}{5}$

6. Dans la suite, pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = s_n - \dfrac{2}{3}$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$ et de premier terme $u_1 = -\dfrac{1}{6}$.

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} &= s_{n+1} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{5}s_n + \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{5}s_n - \frac{4}{15} \qquad \text{mais} \quad u_n = s_n - \frac{2}{3} \iff s_n = u_n + \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{5}\left(u_n + \frac{2}{3}\right) - \frac{4}{15} \\ &= \frac{2}{5}u_n + \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} - \frac{4}{15} \\ &= \frac{2}{5}u_n \end{aligned}$$

On peut en déduire que (u_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$ et de premier terme $u_1 = s_1 - \dfrac{2}{3} = 0,5 - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{6}$

b) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, où n est un entier naturel non nul.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 \times q^{n-1} = -\dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$

c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $s_n = -\dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{3}$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, s_n = u_n + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{3}$

d) Déterminer la limite de la suite (s_n) quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

$-1 < \dfrac{2}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \dfrac{2}{3}$ ce qui signifie que dans un grand nombre de jours, la probabilité qu'un employé mange au self tend vers $\dfrac{2}{3}$.

▷ **Exercice 4.** Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Cet exercice consiste à étudier la propagation d'une information d'une personne à l'autre, thème souvent abordé en sciences sociales. Cette information se transmet avec un risque d'erreur, c'est-à-dire avec une probabilité de propagation de l'information contraire.

On considère l'information suivante, notée E : « Paul a réussi son examen ».

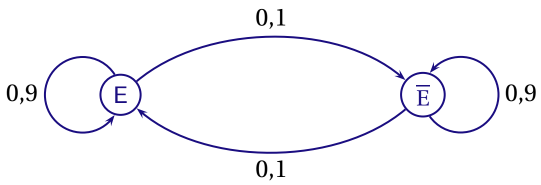
Partie A : Propagation symétrique (de type « neutre »)

Dans cette partie, on suppose que, pour une information reçue (E ou $\overline{\mathrm{E}}$), la probabilité de communiquer cette information à l'identique vaut 0,9 et la probabilité de relayer l'information contraire vaut 0,1.

On note p_n la probabilité de recevoir l'information E au bout de n étapes (n étant le nombre de personnes ayant transmis l'information) et on note q_n la probabilité de recevoir l'information $\overline{\mathrm{E}}$ au bout de n étapes.

On suppose que Paul a réussi son examen, on pose $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

1. Recopier puis compléter le graphe probabiliste relatif à la propagation de l'information suivant :



2. Préciser la matrice de transition M telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \mathrm{M}$.

La matrice de transition est $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

3. À l'aide de la calculatrice, trouver le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0,8$.

On a successivement :

$\mathrm{P}_1 = \mathrm{P0} \times \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$;

$\mathrm{P}_2 = \mathrm{P0} \times \mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,82 & 0,18 \end{pmatrix}$;

$\mathrm{P}_3 = \mathrm{P0} \times \mathrm{M}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0,756 & 0,244 \end{pmatrix}$.

Donc le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0,8$ est $n = 3$.

4. Déterminer par le calcul, l'état stable.

La matrice de transition de ce graphe probabiliste d'ordre 2 est $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$. Elle ne comporte pas de 0 donc l'état probabiliste P_n à l'étape n converge vers un état stable P qui est indépendant de l'état initial P_0 et qui vérifie $\mathrm{P} = \mathrm{P} \times \mathrm{M}$.

On note $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$ donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} = \mathrm{P} \times \mathrm{M} &\iff \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9p + 0,1q & 0,1p + 0,9q \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} p = 0,9p + 0,1q \\ q = 0,1p + 0,9q \end{cases}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait que $p + q = 1$. On conserve la première équation du système (les deux équations sont équivalentes) et on en déduit :

$$\begin{cases} p = 0,9p + 0,1q \\ p + q = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0,1p - 0,1q = 0 \\ q = 1 - p \end{cases} \iff \begin{cases} 0,1p - 0,1(1-p) = 0 \\ q = 1 - p \end{cases} \iff \begin{cases} 0,2p - 0,1 = 0 \\ q = 1 - p \end{cases} \iff \begin{cases} p = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2} \\ q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

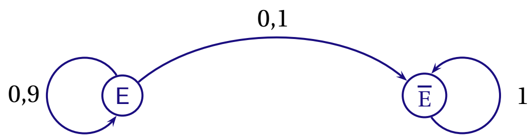
L'état stable est donc $\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Partie B : Propagation asymétrique (de type « rumeur »)

Dans cette partie, on suppose toujours que la probabilité de transmission correcte de l'information E est égale à 0,9. Toutefois, il circule la fausse rumeur $\overline{\mathrm{E}}$. Dans ces conditions, on suppose que si l'information reçue est $\overline{\mathrm{E}}$, la probabilité de transmettre cette information $\overline{\mathrm{E}}$ est égale à 1.

On suppose de nouveau que $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.



2. Préciser la matrice de transition N telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \mathrm{N}$.

On a $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Montrer que $p_{n+1} = 0,9p_n$. Quelle est la nature de la suite (p_n)?

$\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \mathrm{N} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9p_n & 0,1p_n + q_n \end{pmatrix}$.

Donc $p_{n+1} = 0,9p_n$: la suite (p_n) est géométrique de raison 0,9.

4. Exprimer p_n en fonction de n.

Comme $p_0 = 1$, on sait que $p_n = p_0 \times 0,9^n = 0,9^n$.

5. Trouver par le calcul, le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0,5$.

$p_n < 0,5 \iff 0,9^n < 0,5 \iff n \ln 0,9 < \ln 0,5 \iff n > \dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,9}$ (car $\ln 0,9 < 0$).

Comme $\dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,9} \approx 6,6$, le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0,5$ est $n = 7$.

6. Déterminer la limite de (p_n) lorsque n tend vers $+\infty$ puis interpréter le résultat obtenu.

On sait que comme $0 < 0,9 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$.

Conclusion : sur le long terme seule la fausse rumeur sera transmise.