Notions de logique

Préliminaires (petite discussion, introduction orale …)

1) La proposition

a) *Définition :*

Une proposition est un énoncé mathématique (composée de mots ,de lettres , de symboles ,de chiffres ,… ..) **qui a un sens** pouvant être **vrai** ou bien **faux** (pas les deux en même temps) les propositions sont souvent notées P,Q ,R etc. …

b) *Valeur de vérité d'une proposition :*

Déterminer la valeur de vérité d'une proposition P c'est dire si P est vraie ou P fausse ; lorsque P est vraie on dit que sa valeur de vérité est 1 ou V lorsque P est fausse on dit que sa valeur de vérité est 0 ou F

c) *Exemples :*

P : « 5 est un entier naturel qui s'écrit sous la forme 5=2*k*+1 avec $k \in IN$ »
P est une proposition vraie

Q :« $7-\frac{5}{3}=\frac{2}{3}$ ».
Q est une proposition fausse

R :« $\frac{5}{7}$ *est un nombre impair* »
R n'est pas une proposition (pas de sens)

S « $\sqrt{8} \neq$ *dans un triangle positif* »
S n'est pas une proposition (pas de sens)

T :« $x^2 \geq 100$ »
T n'est pas une proposition (on ne peut pas savoir si elle est vraie ou fausse)

Remarque *: en pratique lorsque on écrit on a : P , cela veut dire on a P est vraie*

2) la fonction propositionnelle

a) définition

la fonction propositionnelle c'est un énoncé contenant une variable ou plusieurs variables appartenant à des ensembles déterminés et qui devient une proposition lorsque on remplace la variable ou les variables par des valeurs par des éléments de ces ensembles

b) exemples :

P(x) : « $x^2 \geq 100$ » c'est une fonction propositionnelle
On remarque que P(x) est vraie pour certaines valeurs de x et elle est fausse pour d'autres
P(x) est vraie pour x=12 ; x=30 ; x=-20 ;…..
P(x) est fausse pour x= 0 ; x= 3 ;

Q(x,y ,z) : « $x^2+y^2=z^2$ » est une fonction propositionnelle
Q(x,y,z) est vraie pour (x,y,z)=(0,0,0) ; (x,y,z)=(3,4,5)
Q(x,y,z) est fausse pour (x,y,z)=(1,1,1) ; (x,y,z)=(3,7,2)

R(x ,y) : « $|x+y| = |x| + |y|$ est une fonction propositionnelle
R(x ,y) est vraie pour x=2 et y= 3
R(x ,y) est fausse pour x= -2 et y= 3

3) les quantificateurs :

Soit P(x) avec x appartient à un ensemble E une fonction propositionnelle.

a) ***Quantificateur universel***

la proposition : « pour tout x de E on a P(x) est vraie » ou « quel que soit l'élément x de E on a P(x) est vraie »
ou « tous éléments de E vérifient P(x)»
s'écrit : « $\forall x \in E : P(x)$ »
Le symbole $\forall$ s'appelle quantificateur universel et il se lit : pour tout .. ou quel que soit ..

b) *quantificateur existentiel* :

la proposition : « il existe au moins un élément x de E tel que P(x) est vraie »
s'écrit : « $\exists x \in E : P(x)$ »
la proposition : « il existe un unique élément x de E tel que P(x) est vraie »
s'écrit : « $\exists ! x \in E : P(x)$ »
Le symbole $\exists$ s'appelle quantificateur existentiel et il se lit : il existe au moins

c) Exemples :

donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

$P \ll \forall x \in \mathbb{R} : 4x^2 - 9 = (2x-3)(2x+3) \gg$

$Q \ll \forall x > 0 : x^2 > x : \gg$

$S \ll \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 5 \gg$

$R \ll \exists n \in \mathbb{N} / \sqrt{n+2} = 5 \gg$

$S(x) \ll \exists x \in \mathbb{R} / |x| = -7 \gg$

d) remarque

observons ces deux propositions :

$P_1 : \forall x \in IR, \forall y \in IR : x - 2y \geq 1$

$P_2 : \forall y \in IR, \forall x \in IR : x - 2y \geq 1$

Les propositions P_1 *et* P_2 sont les mêmes

Et observons ces deux propositions :

$Q_1 : \exists x \in IR, \exists y \in IR : x - 2y \geq 1$

$Q_2 : \exists y \in IR, \exists x \in IR : x - 2y \geq 1$

Les propositions Q_1 *et* Q_2 sont les mêmes

Et observons ces deux propositions :

$R_1 : \forall x \in IR, \exists y \in IR : x - y = 1$

$R_2 : \exists y \in IR, \forall x \in IR : x - y = 1$

les propositions R_1 *et* R_2 n'ont pas le même sens , ce sont deux propositions différentes .

En général :

L'ordre des quantificateurs identiques (universel ou bien existentiel) ne change pas le sens de la Proposition.

L'ordre des quantificateurs non identiques (universel et existentiel) peut changer le sens de la proposition.

4) les connecteurs logiques

a) La négation d'une proposition :

La négation d'une proposition P est la proposition qu'on note $non(P)$ ou $\overline{P}$ qui est vraie lorsque *P* est fausse et qui est fausse lorsque *P* est vraie.

Tableau de vérité de $\overline{P}$:

P	Non(P)
1	0
0	1

- exemples :

$$P:(\frac{1}{2}\in\mathbb{N}\ )\ ;\ \bar{P}:(\frac{1}{2}\notin\mathbb{N})$$
$$Q:(\sqrt{1}=1)\ ;\ \ \bar{Q}:(\sqrt{1}\neq 1)$$
$$R:(\frac{2}{3}<1)\ \ ;\ \bar{R}:(\frac{2}{3}\geq 1)$$
$$S:(\sqrt{2}\leq 2)\ \ ;\ \bar{S}:(\sqrt{2}>2)$$

b) la négation d'une proposition avec quantificateurs :

$$la\ négation\ de\ la\ proposition\ P_1:\forall x\in E:P(x)$$
$$est\ la\ proposition\ \bar{P_1}:\exists x\in E\ /\ non(P(x))$$

$$la\ négation\ de\ la\ proposition\ P_2:\exists x\in E:P(x)$$
$$est\ la\ proposition\ \bar{P_2}:\forall x\in E\ /\ non(P(x))$$

- exemples

$$la\ négation\ de\ la\ proposition\ P:\forall x\in\mathbb{R}:x^2\geq 0$$
$$est\ la\ proposition\ \bar{P}:\exists x\in\mathbb{R}\ /\ x^2<0$$

$$la\ négation\ de\ la\ proposition\ Q:\exists(x,y,z)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*:x^3+y^3=z^3$$
$$est\ la\ proposition\ \bar{Q}:\forall(x,y,z)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*:x^3+y^3\neq z^3$$

$$la\ négation\ de\ la\ proposition\ R:\forall x\in\mathbb{R}\ ,\exists n\in\mathbb{N}\ :n>x$$
$$est\ la\ proposition\ \bar{R}:\exists x\in\mathbb{R}\ /\ \forall n\in\mathbb{N}\ :n\leq x$$

c) La conjonction de deux propositions

La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition notée (P et Q) ou bien (P ^ Q) ; et elle est vraie seulement dans le cas où P et Q sont toutes les deux vraies .

- Tableau de vérité de (P et Q) est :

P	Q	(P et Q)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

- Exemple :

$la\ proposition\ P : \left\langle 2\ est\ un\ entier\ pair\ et\ \sqrt{3} \leq 2 \right\rangle est\ fausse.$

$la\ proposition\ Q : \left\langle \pi \in \mathbb{Q}\ et\ \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \right\rangle est\ fausse.$

$la\ proposition\ P : \left\langle \left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1\ et\ \sin(30^0) = \frac{1}{2} \right\rangle est\ vraie.$

c) La disjonction de deux propositions :

La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition notée (P ou Q) ou bien (P v Q) ; et elle est fausse seulement dans le cas où P et Q sont toutes les deux fausses .

- Tableau de vérité de (P ou Q) est :

P	Q	(P ou Q)
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- Exemple :

$la\ proposition\ P : \left\langle 2\ est\ un\ entier\ pair\ ou\ \sqrt{3} \leq 2 \right\rangle est\ vraie.$

$la\ proposition\ Q : \left\langle \pi \in \mathbb{Q}\ ou\ \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \right\rangle est\ fausse.$

$la\ proposition\ P : \left\langle \left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1\ ou\ \sin(30^0) = \frac{1}{2} \right\rangle est\ vraie.$

e) L'implication de deux propositions :

l'implication de deux propositions P puis Q est la proposition $(\bar{P}\ ou\ Q)$; qu'on note par $P \Rightarrow Q$ on lit (P implique Q) et se lit aussi (si P alors Q)

- Le tableau de vérité de $P \Rightarrow Q$ est :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- **Remarque :**
  - l'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse dans le seul cas où P est vraie et Q est fausse .
  - La proposition P s'appelle les données (ou hypothèses) de l'implication $P \Rightarrow Q$.
  - La proposition Q s'appelle la conclusion de l'implication $P \Rightarrow Q$.
  - l'implication $Q \Rightarrow P$ s'appelle l'implication réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$
    (elles sont différentes)
  - L'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ s'appelle la contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$.
    $P \Rightarrow Q$ et $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ ont des tableaux de vérité identiques (à vérifier)
    (on exprimera ça plus tard en disant qu'elles sont équivalentes)

f) l'eqivalence :

l'équivalence de deux propositions P et Q est la proposition $(P \Rightarrow Q \, et \, Q \Rightarrow P)$ on note par $P \Leftrightarrow Q$ on lit P est équivalente à Q ou bien : P si et seulement si Q .

- Le tableau de vérité de $P \Leftrightarrow Q$ est :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

- **Exemples :**

$$(3 \, est \, un \, nombre \, premier \Leftrightarrow 5 < 7) \, est \, une \, proposition \, vraie$$
$$(5 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \pi \, est \, un \, rationnel) \, est \, une \, proposition \, fausse$$
$$(\pi = 3{,}14 \Leftrightarrow \pi = \frac{22}{7}) \, est \, une \, proposition \, vraie$$

5) Les lois logiques

une loi logique est une proposition composée de plusieurs propositions liees entre elles par des connecteurs logiques et qui reste vraie quelque soient les valeurs de vérité des propositions qui la composent.

- Exemples utiles : (à vérifier par des tableaux de vérité)
  - $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$
  - $(P \, et \, P) \Leftrightarrow P$
  - $(P \, ou \, P) \Leftrightarrow P$
  - $(P \, et \, Q) \Leftrightarrow (Q \, et \, P)$ **(commutativité)**
  - $(P \, ou \, Q) \Leftrightarrow (Q \, ou \, P)$ **(commutativité)**

- $\langle P\, et\, (Q\, et\, R)\rangle \Leftrightarrow \langle (P\, et\, Q)\, et\, R)$ **(associativité)**
- $\langle P\, ou\, (Q\, ou\, R)\rangle \Leftrightarrow \langle (P\, ou\, Q)\, ou\, R)$ **(associativité)**
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P}\, et\, Q)$
- $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P)$
- $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q})$
- $\left[(P \Rightarrow Q)\, et\, (Q \Rightarrow R)\right] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
- $\left[(P \Leftrightarrow Q)\, et\, (Q \Leftrightarrow R)\right] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$
- **Les lois de *MORGAN***
  - $\overline{(P\, et\, Q)} \Leftrightarrow (\overline{P}\, ou\, \overline{Q})$
  - $\overline{(P\, ou\, Q)} \Leftrightarrow (\overline{P}\, et\, \overline{Q})$

- Applications :

Donner la valeur de vérité et la négation de chacune des propositions suivantes :

1. $P \Rightarrow Q$
2. $\forall x \in \mathbb{R} : (x^2 = 4 \Rightarrow x = 2)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^* / x^2 - 3x \neq 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R} / (x \leq 5 \; et \; x^2 > 100)$

6) TYPES DE RAISONNEMENTS :

Raisonnement par contre exemple :

Pour prouver que la proposition : $\langle \forall x \in E : P(x) \rangle$ **est fausse il suffit de prouver que** $\langle \exists x \in E : \overline{P}(x) \rangle$ **est vraie (c.à.d. de trouver un élément x de E qui ne vérifie pas** $P(x)$ **ce qu'on appelle un contre-exemple) .**

exemple :

donner la valeur de vérité de la proposition : $\forall x \geq 0 : x^2 \geq x$

donner la valeur de vérité de la proposition : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 = y \Rightarrow x = y)$

Raisonnement par des équivalences successives :

pour démontrer que $P \Leftrightarrow Q$ *est vraie on montre que les propositions* :
$Q \Leftrightarrow Q_1$ *et* $Q_1 \Leftrightarrow Q_2$ *et* $Q_2 \Leftrightarrow Q_3$ *et* $\ldots Q_n \Leftrightarrow Q$ *sont vraies*.

- **exemple :**

  montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} : \left(x \in [-2, 3]\right) \Leftrightarrow -11 \leq -5x + 4 \leq 14$

  montrer que : $\forall x > 0 : \; x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ (raisonnement par équivalence)

Raisonnement déductif :

si les propositions P *est vraie et* $P \Rightarrow Q$ *est vraie alors* Q *est vraie*

- **exemple :**

  montrer que : $\forall a \in \mathbb{R} : a^6 \geq 2a^3 - 1$

  on a : $\forall x \in (x-1)^2 \geq 0$

  et on a : $\forall x \in \mathbb{R} (x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 \geq 0$

  $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2x - 1$

  $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} : a^6 \geq 2a^3 - 1$ **(en posant** $x = a^3$ **)**

  donc : $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} : a^6 \geq 2a^3 - 1$

Raisonnement par la contraposée :

les deux propositions : $P \Rightarrow Q$ *et* $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ *sont éqivalentes*

donc pour montrer que $P \Rightarrow Q$ **est vraie il suffit de montrer que** $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ *est vraie*

- **exemple :**

  montrer que : $\forall x \geq 1 et \forall y \geq 1 : (x \neq y \Rightarrow x^2 + 2y \neq y^2 + 2x)$

➢ *Raisonnement par disjonction des cas :*

montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)$ *est un nombre pair*

……….

➢ *Raisonnement par absurde :*

P **une proposition vraie**

Pour démontrer qu'une proposition est vraie

On suppose que Q est fausse et au cour de la démonstration on obtient que $\overline{P}$ **est vraie d'où** P **et** $\overline{P}$ **sont vraies ce qui est impossible .**

Donc notre supposition Q fausse est absurde ; d'où Q est vraie.

- **Exemple :**

  $montrer\ que\ \forall n \in \mathbb{N} : \sqrt{n^2+1}\ n'est pas\ un\ entier$

➢ *Raisonnement par récurrence :*

soit $n_0 \in \mathbb{N}$ *et soit* $P(n)$ *une proprieté dependante de* $n \in \mathbb{N}$ *avec* $n \geq n_0$.

Pour démontrer que la propriété $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *avec* $n \geq n_0$

On utilise les étapes suivantes :

I. **On vérifie que :** $P(n_0)$ *est vraie* (*la base de la recurrence*) **- (l'initialisation)**
II. **on suppose que** ¨$P(n)$ *est vraie jusqu'au rang* n *avec* $n \in \mathbb{N}$ *et* $n \geq n_0$

    (cette suppositions 'appelle hypothèse de récurrence)

    et on montre que $P(n+1)$ *est vraie* **- (l'hérédité)**

    et on en déduit que : $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *avec* $n \geq n_0$ **- (la conclusion)**

- **Exemples :**

$$montrer\ que\ \forall n \in \mathbb{N} :\ 1+2+3+\cdots = \frac{n(n+1)}{2}$$