EXERCICE 1 **6 points**

Les dépenses annuelles de fonctionnement de deux services d'une entreprise, nommés ici A et B, ont été étudiées sur une assez longue période, ce qui a conduit à la modélisation suivante.

Les dépenses du service A augmentent de 4 000 € chaque année, tandis que celles du service B augmentent de 15 % chaque année.
Cette année (qui sera prise dans la suite comme année 1), les deux services ont effectué des dépenses identiques : 20 000 €.
On note a_n le total des dépenses du service A et b_n le total des dépenses du service B la n-ième année. On s'intéresse aussi au cumul de ces dépenses sur plusieurs années. Le tableau ci-dessous, extrait d'une feuille automatisée de calcul, donne les résultats pour les premières années.

	P	Q	R	S	T
1	Numéro de l'année : n	Dépenses du service A : a_n	Cumul des dépenses du service A	Dépenses du service B : b_n	Cumul des dépenses du service B
2	1	20 000	20 000	20 000	20 000
3	2	24 000	44 000	23 000	43 000
4	3	28 000	72 000	26 450	69 450
5	4	32 000		30 417,50	99 867,50
6	5				
7	6				
8	7				
9	8				
10	9				
11	10				

Partie A : Étude des dépenses du service A

1. **a.** Quelle est la nature et quelle est la raison de la suite (a_n) des dépenses annuelles du service A ?
   b. Exprimer a_n en fonction de n.
   c. Calculer a_{10}.
2. Proposer une formule qui, entrée dans la cellule R3, permet par recopie vers le bas de calculer le cumul des dépenses du service A.
3. Calculer la somme $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_9 + a_{10}$. Que représente cette somme ?

Partie B : Étude des dépenses du service B

1. Quelle formule entrée dans la cellule S3 permet par recopie vers le bas de calculer les dépenses annuelles du service B ?
   a. Quelle est la nature et quelle est la raison de la suite (b_n) des dépenses du service B ?
   b. Exprimer b_n en fonction de n.
2. Calculer les dépenses annuelles prévisibles pour le service B lors de la dixième année. On arrondira le résultat à la centaine d'euros.

Partie C : Comparaison des deux services

Lequel des deux services aura le plus dépensé en 10 ans pour son fonctionnement ?

corrrigé

	P	Q	R	S	T
1	Numéro de l'année : n	Dépenses du service A : a_n	Cumul des dépenses du service A	Dépenses du service B : b_n	Cumul des dépenses du service B
2	1	20 000	20 000	20 000	20 000
3	2	24 000	44 000	23 000	43 000
4	3	28 000	72 000	26 450	69 450
5	4	32 000	104 000	30 417,50	99 867,50
6	5	36 000	140 000	34 980,13	134 847,63
7	6	40 000	180 000	40 227,14	175 074,77
8	7	44 000	224 000	46 261,22	221 335,98
9	8	48 000	272 000	53 200,40	274 536,38
10	9	52 000	324 000	61 180,46	335 716,84
11	10	56 000	380 000	70 357,53	406 074,36

Partie A : Étude des dépenses du service A

1. **a.** La suite (a_n) des dépenses annuelles du service A est une suite arithmétique car les dépenses augmentent d'une somme constante chaque année. Sa raison est 4 000 et son premier terme 20 000.

   b. Exprimons a_n en fonction de n. Le terme général d'une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r est $u_n = u_1 + (n-1)r$. Par conséquent $a_n = 20000 + (n-1) \times 4000$.

   c. Calculons a_{10}. $a_{10} = 20000 + 9 \times 4000 = 56000$.

2. Une formule qui, entrée dans la cellule R3, permet par recopie vers le bas de calculer le cumul des dépenses du service A est =R2+Q3. (On peut mettre $ devant les lettres.)

3. Calculons la somme $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}$.
   La somme des termes d'une suite arihmétique est $S_n =$ nombre de termes $\times$ la demi-somme des termes extrèmes
   $S_{10} = \dfrac{10 \times (a_1 + a_{10})}{2} = \dfrac{10 \times (20000 + 56000)}{2} = 380000$.
   Cette somme représente le montant des dépenses cumulées du service A.

Partie B : Étude des dépenses du service B

1. La formule entrée dans la cellule S3 qui permet par recopie vers le bas de calculer les dépenses annuelles du service B est =S2*1,15. (On peut ausi écrire, =$S2*1,15)

   a. Si une grandeur subit une évolution au taux t, le coefficient multiplicateur asocié est $(1+t)$. Nous avons donc ici un coeficient multiplicateur égal à 1,15. Passant d'un terme au suivant en le multipliant par un même nombre, la suite (b_n) des dépenses du service B est une suite géométrique de raison 1,15 et de premier terme 20 000.

   b. Le terme général u_n d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1 est $u_n = u_1 q^{n-1}$. $b_n = (2000(1.15)^{n-1}$.

2. Les dépenses annuelles prévisibles pour le service B lors de la dixième année s'élèvent à b_{10}.
   $b_{10} = 20000 \times (1,15)^9 \approx 70400$.

Partie C : Comparaison des deux services

Pour déterminer lequel des deux services aura le plus dépensé en 10 ans pour son fonctionnement, calculons d'abord $b_1 + b_2 + \cdots + b_9 + b_{10}$.

La somme S_n des n premiers termes d'une suite géométrique est $u_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1}$. Appliquons $S_{10} = 20000 \dfrac{1,15^{10} - 1}{1,15 - 1} \approx 406074$.

Par conséquent, le service B aura dépensé davantage en dix ans pour son fonctionnement.(406 074>380 000).

On s'intéresse au tarif d'affranchissement postal en France depuis l'année 2002. Le tableau suivant donne l'évolution du prix du timbre-poste au cours de ces huit dernières années.

Année	2002	2003	2005	2006	2008	2009	2010
Prix du timbre (en euros)	0,46	0,50	0,53	0,54	0,55	0,56	0,58

Source : ARCEP (Autorité de régulation des communications électroniques et des postes)

Les prix demandés seront arrondis au centime. Les taux seront donnés en pourcentages arrondis à 0,1 %

1. Déterminer le taux d'évolution du prix du timbre entre 2002 et 2010.
2. Déterminer le taux d'évolution annuel moyen du prix du timbre durant ces huit années.
3. L'ARCEP a décidé qu'entre 2009 et 2011 le taux d'évolution annuel moyen du prix du timbre poste ne pourrait dépasser 2,3 %.

   Si le prix du timbre augmentait de 1 centime en 2011, la décision de l'ARCEP serait-elle respectée ?

Partie B

On désire réaliser une étude de l'évolution du prix du timbre, à l'aide d'une feuille de calcul, en partant d'un prix de 0,59 € en 2012 et en appliquant une augmentation annuelle de 2,3 % à partir de cette date.

On définit la suite (v_n) où v_n représente la valeur estimée, selon ce modèle, du prix du timbre l'année $(2012+n)$.

On a ainsi $v_0 = 0,59$ correspondant au prix du timbre en 2012.

On obtient la feuille de calcul suivante :

Les cellules de la plage B2 : B10 *sont au format nombre à deux décimales.*

	A	B	C
1	n	v_n	
2	0	0,59	
3	1	0,60	
4	2	0,62	
5	3	$\cdots$	
6	4	$\cdots$	
7	5	$\cdots$	
8	6	$\cdots$	
9	7	$\cdots$	
10	8	$\cdots$	

1. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Donner la raison de cette suite.
2. Donner une formule qui, écrite dans la cellule B3, permet d'obtenir, par recopie vers le bas, la plage de cellules B4 : B10 ?
3. Quel serait alors le prix du timbre en 2017 ?
4. Selon ce modèle, en quelle année le prix du timbre poste dépasserait-il 75 centimes d'euro ?

corrigé

1. Déterminons le taux d'évolution du prix du timbre entre 2002 et 2010 :

$$\frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} = \frac{0{,}58 - 0{,}46}{0{,}46} = \boxed{26{,}1\ \%}$$

2. Déterminons le taux moyen annuel d'évolution, exprimé en pourcentage, du prix du timbre entre 2002 et 2010. Durant cette période, le prix du timbre a subi 8 évolutions. Si t_m est le taux d'évolution, nous pouvons dire que le prix du timbre de 2002 à 2010 a été multiplié par $(1+t_m)^8$. Le taux moyen est alors : $t_m = 1{,}261^{\frac{1}{8}} - 1 = \boxed{2{,}9\ \%}$

3. L'ARCEP a décidé qu'entre 2009 et 2011 le taux d'évolution annuel moyen du prix du timbre-poste ne pourrait dépasser 2,3 %.

   Si le prix du timbre augmente de 1 centime en 2011, la décision de l'ARCEP ne peut être respectée. En effet, calculons le coefficient multiplicateur pour passer de 0,56 à 0,59. Il vaut $\frac{0{,}59}{0{,}56} = 1{,}054$. Le taux moyen vaut alors après deux augmentations $1{,}054^{\frac{1}{2}} - 1 = 2{,}7\ \%$

Partie B

On désire réaliser une étude de l'évolution du prix du timbre, à l'aide d'une feuille de calcul, en partant d'un prix de 0,59 € en 2012 et en appliquant une augmentation annuelle de 2,3 % à partir de cette date.
On définit la suite (v_n) où v_n représente la valeur estimée, selon ce modèle, du prix du timbre l'année $(2012+n)$.
On a ainsi $v_0 = 0,59$ correspondant au prix du timbre en 2012.
On obtient la feuille de calcul suivante :
Les cellules de la plage B2 : B10 *sont au format nombre à deux décimales.*

	A	B	C
1	n	v_n	
2	0	0,59	
3	1	0,60	
4	2	0,62	
5	3		
6	4		
7	5		
8	6		
9	7		
10	8		

1. La suite (v_n) est une suite géométrique car chaque terme sauf le premier, se déduit du précédent en le multipliant par 1,023. La raison de cette suite est 1,023.
2. La formule qui, écrite dans la cellule B3, permet d'obtenir, par recopie vers le bas, la plage de cellules B4 : B10 est $\boxed{\text{=B2*1,023}}$
3. En 2017 $n=5$, le prix du timbre en 2017 serait $u_5 = 0{,}59 \times 1{,}023^5 \approx 0{,}66$
4. Selon ce modèle, le prix du timbre-poste dépasserait 75 centimes d'euro en 2023 car $u_{10} \approx 0{,}74$ et $u_{11} \approx 0{,}76$