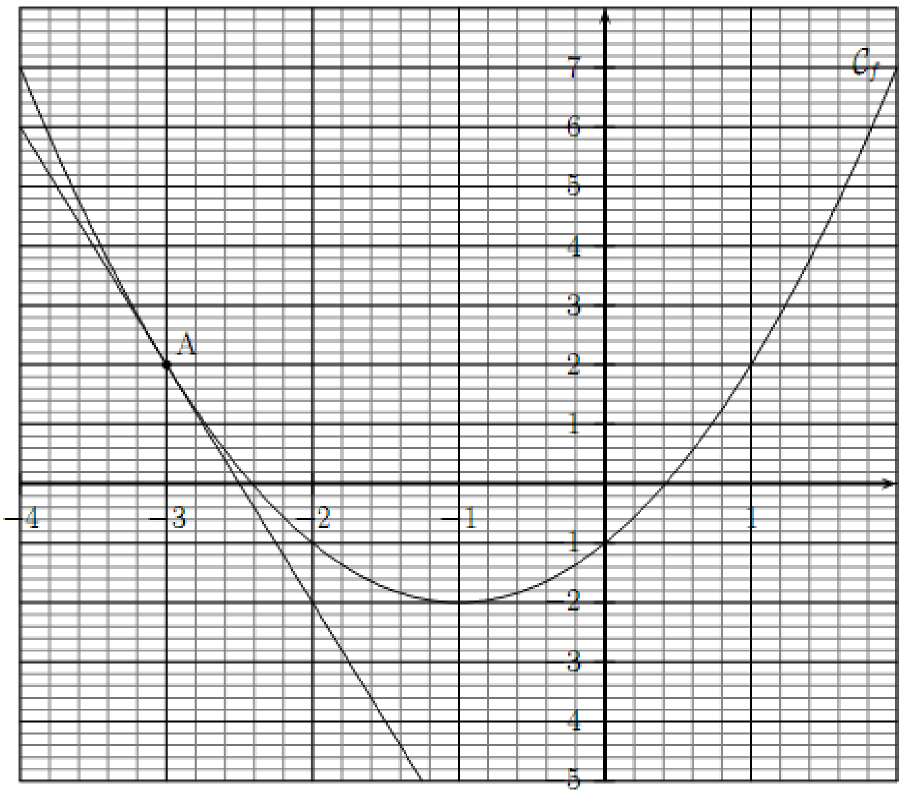
Exercice 1

$f(x) = x^2 + 2x - 1$.

1. **Dérivée :** $\boxed{f'(x) = 2x + 2}$
2. **Tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -3**
   $f'(-3) = 2 \times (-3) + 2 = \boxed{-4}$
   Donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse -3 est $\boxed{4}$.
   Point A et tracé de la tangente (d) : voir figure.
3. **Équation réduite de la droite (d).**
   Puisque le coefficient directeur de la droite (d) est 4, son équation réduite est de la forme : $y = -4x + b$.
   Calculons l'ordonnée de A : $f(-3) = (-3)^2 + 2 \times (-3) - 1 = 2$
   Or, le point A appartient à la droite (d), donc $2 = -4 \times (-3) + b \iff b = 2 - 12 = -10$.
   L'équation réduite de la droite (d) est donc : $\boxed{y = -4x - 10}$



Exercice2

1) Pour étudier les variations de f on étudie le signe de $f'(x) = 3x^2 - 6x - 5$

$\Delta = 96$ donc deux solutions $x_1 = \frac{6-\sqrt{96}}{6} = \frac{3-2\sqrt{6}}{3}$ et $x_2 = \frac{3+2\sqrt{6}}{3}$ d'après la règle du signe d'un trinôme $f'(x)$ *est du signe de a à l'extérieur des racines*

Donc $f'(x) > 0$ *sur* $]-\infty\,;x_1[\,\cup\,]x_2\,;+\infty[$ *et f est donc strictement croissante*

$f'(x) < 0$ *sur* $]x_1\,;\,x_2[$ *et f est donc strictement décroissante*

2) De même $g'(x) = \frac{-1(x+1)-1(4-x)}{(x+1)^2} = \frac{-5}{(x+1)^2} < 0$ *donc g est strictement décroissante*

sur $]-\infty\,;-1[$ *et sur* $]-1\,;+\infty[$

3) $f(0) = 4$ $g(0) = 4$

Donc les 2 courbes passent par A (0 ; 4)

$f'(0) = -5$ *et* $g'(0) = -5$

Donc les tangentes en A sont communes et ont pour équation réduite

$y = -5(x-0) + 4 = -5x + 4$ $y = -5x + 4$

4) $f(x) - g(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 4 - \frac{4-x}{x+1} = \frac{x^3(x+1)-3x^2(x+1)-5x(x+1)+4(x+1)-4+x}{x+1} = \frac{x^4-2x^3-8x^2}{x+1} = \frac{x^2(x^2-2x-8)}{x+1}$

Pour étudier la position des 2 courbes on étudie le signe de $\frac{x^2(x^2-2x-8)}{x+1}$ pour

$x^2 - 2x - 8$ *on a le signe de a à l'extérieur des racines qui sont* -2 *et* 4

x	$-\infty$		-2		-1		0		4		$+\infty$
x^2		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
x^2-2x-8		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	0	$+$	

Donc $f(x) - g(x) < 0$ *sur* $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-1\,;0[\,\cup\,]0\,;4[$ *et donc* c_f *est en dessous de* c_g

$f(x) - g(x) > 0$ sur $]-2\,;-1[\,\cup\,]4\,;+\infty[$ *et donc* c_f *est en dessus de* c_g

Exercice3

1) $f(x) = 3x^2 - 2x - 4$ est une fonction polynôme du second degré

$3 > 0$, alors, la parabole est tournée vers le haut.

Le sommet a pour abscisse $\frac{-(-2)}{2\times 3} = \frac{1}{3}$ et pour ordonnée $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{13}{3}$

$f'(x) = 6x - 2$

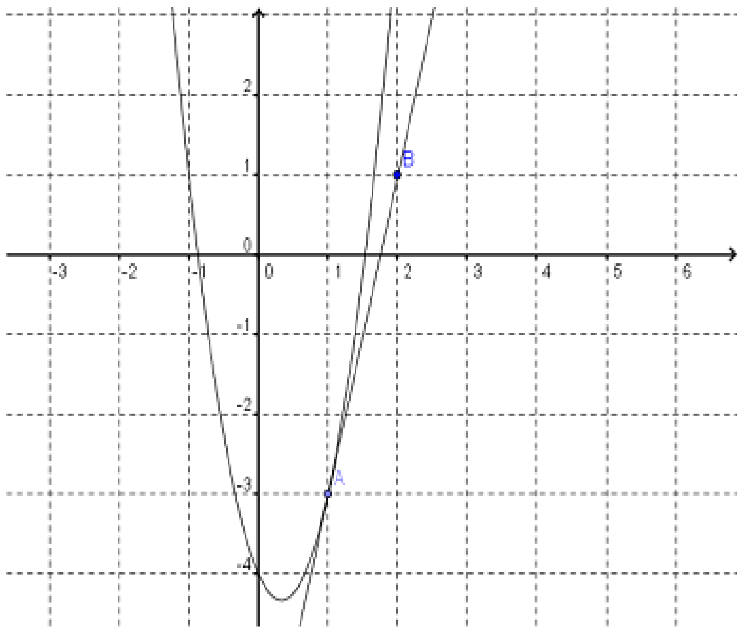
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ $\qquad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$signe\ de\ f'(x)$		-		+	
$variation\ de\ f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{13}{3}$	↗	$+\infty$

2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 4 = 0$

Le discriminant de $3x^2 - 2x - 4$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 52$

Il y a donc deux solutions $\quad S = \left\{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{13}}{3} \;;\; x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{3}\right\}$



3) Ces solutions représentent les abscisses des points d'intersection de la parabole et de l'axe des abscisses.

4) La droite d passe par le point A(1 ;-3) et dirigée par le vecteur $\vec{u}\left(\frac{1}{2};2\right)$

Donc une équation cartésienne est de la forme : $2x - \frac{1}{2}y + c = 0$

Et $2 \times 1 - \frac{1}{2} \times (-3) + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{7}{2}$

Une équation cartésienne de d est : $2x - \frac{1}{2}y - \frac{7}{2} = 0$

5) Cherchons si il existe une tangente à la courbe parallèle à d

Il faut résoudre l'équation: $f'(x) = 4$ car le coefficient directeur de la droite d est 4

$$6x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 1$$

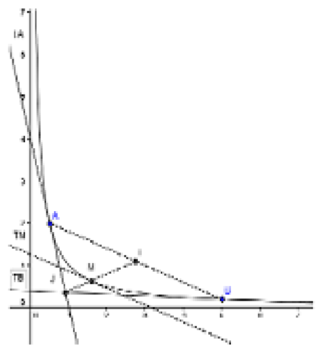
Cherchons l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \;\; soit \;\; y = 4(x-1) - 3 \;\; soit \;\; y = 4x - 7$$

Or $2x - \frac{1}{2}y - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow y = 4x - 7$

Au point d'abscisse 1, la tangente à la courbe est donc la droite d !

Exercice4



1) a) $A \in C_f$ donc $y_A = f(x_A) = f(\frac{1}{2}) = \mathbf{2}$;

$B \in C_f$ donc $y_B = f(x_B) = f(5) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$.

c) $I(x_I; y_I)$ est le milieu de [AB] donc

$\boldsymbol{x_I} = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{\frac{1}{2}+5}{2} = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{4}}$ et $\boldsymbol{y_I} = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{2+\frac{1}{5}}{2} = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{10}}$.

2) a) f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Par théorème, l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse x_A est donnée par la formule : $T_A : y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$.

On obtient alors $T_A : y = \frac{-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2$,

soit $T_A : y = -4(x - \frac{1}{2}) + 2$. Après avoir réduit, $\boldsymbol{T_A : y = -4x + 4}$.

De même, $T_B : y = f'(x_B)(x - x_B) + f(x_B)$.

On obtient alors $T_B : y = \frac{-1}{5^2}(x-5) + \frac{1}{5}$. Après avoir réduit, $\boldsymbol{T_B : y = \frac{-1}{25}x + \frac{2}{5}}$.

c) $J(x_J; y_J)$ est le point d'intersection de T_A et de T_B, ses coordonnées vérifient donc :

$-4x_J + 4 = \frac{-1}{25}x_J + \frac{2}{5}$ et $y_J = -4x_J + 4$.

La première équation donne : $x_J = \frac{\frac{2}{5}-4}{-4+\frac{1}{25}} = \frac{\frac{-18}{5}}{\frac{-99}{25}} = \frac{10}{11}$.

La deuxième équation donne $y_J = -4 \times \frac{10}{11} + 4 = \frac{-40}{11} + 4 = \frac{4}{11}$. Donc $\boldsymbol{J(\frac{10}{11}; \frac{4}{11})}$.

3) a) La droite (IJ) admet une équation réduite de la forme $y = ax + b$ avec : $a = \frac{y_J - y_I}{x_J - x_I} = \frac{\frac{4}{11} - \frac{11}{10}}{\frac{10}{11} - \frac{11}{4}} = \frac{\frac{-81}{110}}{\frac{-81}{44}} = \frac{2}{5}$

De plus, comme $I \in (IJ)$, b vérifie : $\frac{11}{10} = \frac{2}{5} \times \frac{11}{4} + b$ et donc $b = 0$. L'équation réduite de (IJ) est $\boldsymbol{y = \frac{2}{5}x}$.

b) $M(x_M; y_M)$ appartient à C_f donc $y_M = \frac{1}{x_M}$ et M appartient à (IJ) donc $y_M = \frac{2}{5}x_M$.

On obtient alors l'équation $\frac{1}{x_M} = \frac{2}{5}x_M$ qui est équivalente à $x_M^2 = \frac{5}{2}$.

Cette équation admet deux solutions : $\sqrt{\frac{5}{2}}$ ou $-\sqrt{\frac{5}{2}}$. Comme x_M est positif on a $\boldsymbol{x_M = \sqrt{\frac{5}{2}}}$ et donc $\boldsymbol{y_M = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}}}}$.

4) Par définition le coefficient directeur de T_M est égal à $f'(x_M)$. Or $f'(x_M) = f'(\sqrt{\frac{5}{2}}) = \frac{-1}{(\sqrt{\frac{5}{2}})^2} = \frac{-2}{5}$.

Par ailleurs, la droite (AB) a pour coefficient directeur : $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{1}{5}-2}{5-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{-9}{5}}{\frac{9}{2}} = \frac{-2}{5}$.

T_M et (AB) ont le même coefficient directeur, **elles sont donc parallèles.**

Exercice5 Ecrit très petit... utilisez Alt++

1°) f est une fonction rationnelle donc elle dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{m} \right\}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{m} \right\} \quad f_m'(x) = \frac{(2x-2m)(mx-1)-(x^2-2mx+1)\times m}{(mx-1)^2} = \frac{2mx^2-2x-2m^2x+2m-mx^2+2m^2x-m}{(mx-1)^2} = \frac{mx^2-2x+m}{(mx-1)^2}$$

On pouvait poser $u(x) = x^2 - 2mx + 1$ et $v(x) = mx - 1$.
On avait alors $u'(x) = 2x - 2m$ et $v'(x) = m$.

2°)

Une équation de T s'écrit $y = f_m'(0)(x-0) + f_m(0)$. On a : $f_m(0) = -1$ et $f_m'(0) = m$. Par conséquent, T a pour équation $y = mx - 1$.

3°)

a) Les abscisses des points de $\mathscr{C}_m$ en lesquels la tangente est parallèle à T sont les solutions de l'équation $f_m'(x) = m$ (E).

On remarque que $\mathscr{A}_{CNP} = \frac{1}{2} f(x)$ (pour $x \in [0;1]$).
On s'intéresse donc à la restriction de la fonction f à l'intervalle [0 ; 1].
On a les variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc obtient les variations de f sur $[0;1]$.

Comme $\frac{1}{2} > 0$, les variations de la fonction $g : x \longmapsto \frac{1}{2} f(x)$ sont les mêmes que celles de f.

On observe que $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \in [0;1]$ (par exemple en utilisant la calculatrice).

D'après le tableau de variation établi à la partie 1, le maximum de f sur [0 ; 1] est égal $\frac{5\sqrt{5}-11}{2}$ et il est atteint en $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Donc le maximum de g sur [0 ; 1] est égal $\frac{5\sqrt{5}-11}{4}$ et il est atteint en $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

L'aire du triangle CPN est donc maximale lorsque $AM = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; dans ce cas, elle vaut $\frac{5\sqrt{5}-11}{4}$.

3°) **Bonus :**

On effectue une résolution approchée de l'équation $\frac{x^2-x^3}{2(x+1)} = 0{,}01$ à l'aide de la calculatrice.

On trace les représentations graphiques des fonctions $x \longmapsto \frac{x^2-x^3}{2(x+1)}$ et $x \longmapsto 0{,}01$.

On règle la fenêtre graphique de manière à avoir une bonne visibilité.

On utilise ensuite la commande d'intersection pour déterminer une valeur approchée des abscisses des points d'intersection.

Il y a trois points d'intersection.

On lit les affichages suivants :

$-0{,}1247532$	$0{,}16747042$	$0{,}95728277$

Donc

La valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de α est 0,167.

La valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de β est 0,957.