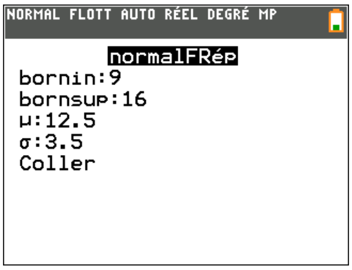
Lois normales : exercices 1 à 12

▷ **Exercice 1.** À l'issue des épreuves du baccalauréat, une étude est faite sur les notes obtenues par les candidats en mathématiques et en français.

On admet que la note de mathématiques peut être modélisée par une variable aléatoire X_M qui suit la loi normale de moyenne 12,5 et d'écart-type 3,5.

De même la note de français peut être modélisée par une variable aléatoire X_F qui suit la loi normale de moyenne 13,2 et d'écart-type 2,1.



1. Déterminer $P(9 \leqslant X_M \leqslant 16)$ en donnant le résultat arrondi au centième.

   A la calculatrice, on obtient : $P(9 \leqslant X_M \leqslant 16) \approx 0,683$

2. Expliquer comment on peut retrouver le résultat précédent sans la calculatrice.

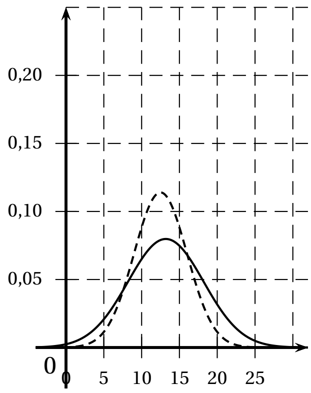
   On pouvait aussi remarquer que :

   $P(9 \leqslant X_M \leqslant 16) = P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma \approx 0,683$ d'après le cours.

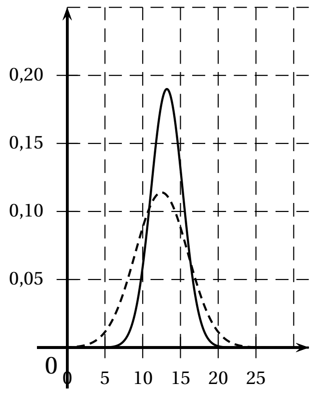
3. Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté en pointillé la fonction densité associée à la variable aléatoire X_M. La fonction densité associée à X_F est représentée sur un seul de ces graphiques.

   Quel est ce graphique ? Expliquer le choix.

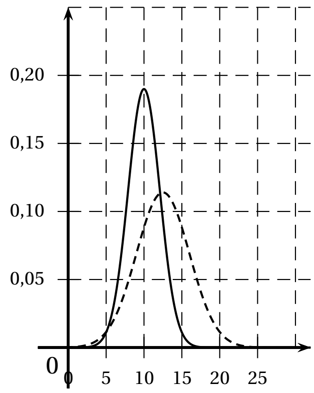
   L'espérance de X_F est plus grande que celle de X_M donc la courbe qui représente sa fonction densité est décalée vers la droite par rapport à celle de de X_M, ce qui élimine le graphique 3. De plus, l'écart-type de X_F est inférieur à l'écart-type de X_M donc sa courbe représentative est moins évasée. Seul le graphique 2 convient.



Graphique 1



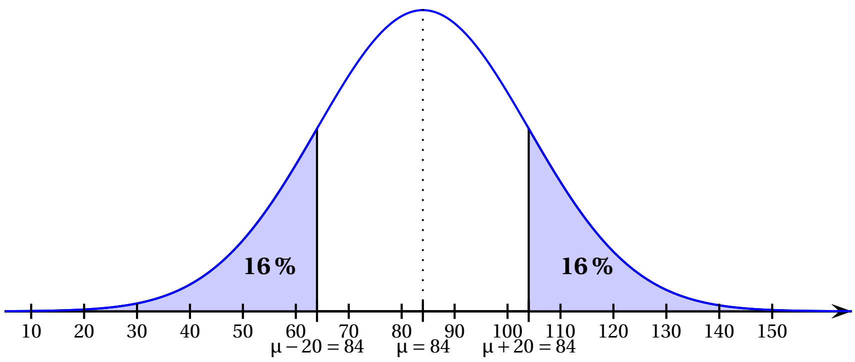
Graphique 2



Graphique 3

▷ **Exercice 2.** Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un appareil électronique. par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type σ. De plus, on a $P(X \leqslant 64) = 0,16$.

La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



1. a) En exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leqslant X \leqslant 104)$.

$P(64 \leqslant X \leqslant 104) = P(84-20 \leqslant X \leqslant 84+20) = 1 - P(X \leqslant 84+20) - P(84-20 \leqslant X)$

mais par symétrie de la courbe, $P(X \leqslant 84+20) = P(84-20 \leqslant X)$ donc $P(64 \leqslant X \leqslant 104) = 1 - 2 \times 0,16 = 0,68$.

b) Quelle valeur approchée entière de σ peut-on proposer ?

On sait que $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma \approx 0,68$ donc d'après ce qui précède, $\sigma \approx 20$

2. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{X-84}{\sigma}$.

a) Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?

Z est la variable aléatoire centrée réduite de X donc elle suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$

b) Justifier que $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.

$$\begin{aligned} X \leqslant 64 &\iff X - 84 \leqslant 64 - 84 \\ &\iff \frac{X-84}{\sigma} \leqslant \frac{-20}{\sigma} \quad (\sigma > 0) \\ &\iff Z \leqslant \frac{-20}{\sigma} \end{aligned}$$

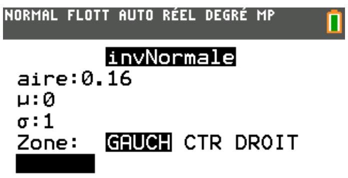
Les événements $X \leqslant 64$ et $Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}$ sont équivalents donc $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.

c) En déduire la valeur de σ, arrondie à 10^{-3}.

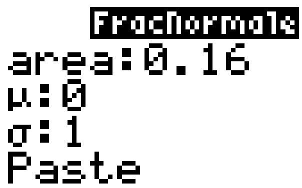
$P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right) = 0,16$

On obtient à l'aide de la calculatrice : $\dfrac{-20}{\sigma} \approx -0,994$ soit $\sigma \approx \dfrac{-20}{-0,994} \approx 20,121$

TI-83 Premium CE



TI-82 *Advanced*

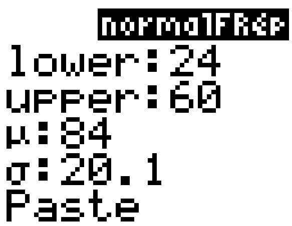


3. Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$. Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3}.

a) Calculer la probabilité que la durée de vie de cet appareil soit comprise entre 2 et 5 ans.

La probabilité que la durée de vie de cet appareil soit comprise entre 2 et 5 ans, c'est à dire entre 24 et 60 mois est :

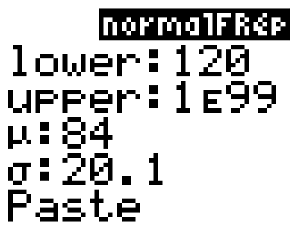
$P(24 \leqslant X \leqslant 60) \approx 0,115$



b) Calculer la probabilité que cet appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

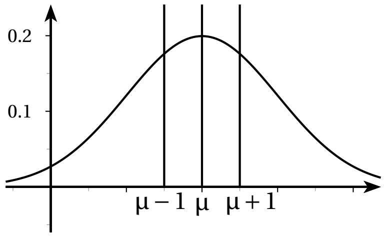
La probabilité que la durée de vie de cet appareil soit supérieure à 10 ans, c'est à dire entre 120 mois est :

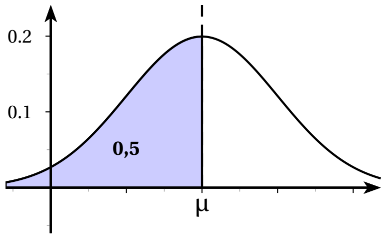
$P(X \geqslant 120) \approx 0,037$

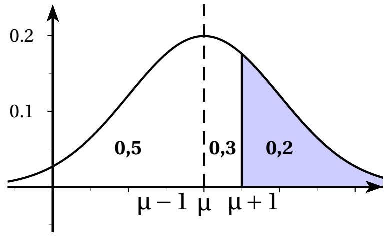


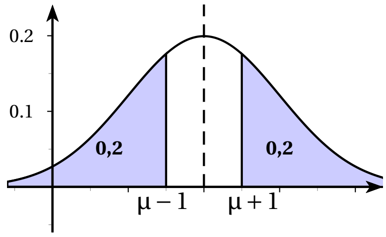
▷ **Exercice 3.** X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$. On sait que $P(\mu < X < \mu+1) = 0,3$.

1. Sur le graphique ci-dessous, hachurer la partie du plan qui illustre la probabilité donnée dans l'énoncé.









2. Donner sans justifier les probabilités suivantes :

a) $P(X < \mu) = 0,5$

b) $P(X > \mu+1) = 0,5 - 0,3 = 0,2$

c) $P(X < \mu-1) = P(X > \mu+1) = 0,2$

d) $P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) \approx 0,68$ donc $P(X > \mu+\sigma) = \dfrac{1 - P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma)}{2} \approx \dfrac{1-0,68}{2} \approx 0,16$

▷ **Exercice 4.** Une cantine sert des repas en nombre très important. Soit X la variable aléatoire qui donne le poids en grammes des rations de viande. On suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}(120;225)$.

1. Quel est le poids moyen d'une ration de viande ?

$\mu = 120\,\text{g}$

2. Quelle est la probabilité pour que le poids d'une ration de viande soit compris entre $110g$ et $135g$?

$X \sim \mathcal{N}(120;225)$ soit $X \sim \mathcal{N}(120;15^2)$ donc $\begin{cases}\mu = 120\\ \sigma = 15\end{cases}$

On obtient à la calculatrice : $P(110 \leqslant X \leqslant 135) \approx 0,589$

3. Le 4 juin, la cantine a servi 850 repas. A combien peut-on évaluer le nombre de rations de viande dont le poids dépassait $130g$?

A la calculatrice, on obtient :

$P(X > 130) \approx 0,252$ donc la proportion du nombre de rations supérieures à 130 g est environ égale à 0,252 ce qui correspond, pour 850 repas, à $850 \times 0,252 \approx 214$ rations.

4. Le cuisinier souhaite que le poids moyen d'une portion reste le même mais il veut améliorer la découpe de la viande de telle manière que la proportion de portions ayant un poids inférieur à $100g$ soit égale à 0,001. Ainsi X suit la loi normale $\mathcal{N}(120;\sigma^2)$. Déterminer une valeur approchée de σ à 10^{-2} près.

$P(X \leqslant 100) = 0,001$

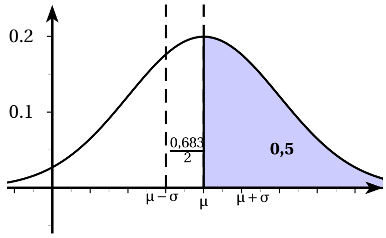
$$\begin{aligned} X \leqslant 100 &\iff X - 120 \leqslant -20 \\ &\iff \frac{X-120}{\sigma} \leqslant \frac{-20}{\sigma} \\ &\iff Z \leqslant \frac{-20}{\sigma} \end{aligned}$$

avec $Z = \dfrac{X-120}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0;1)$

Ainsi, $P(X \leqslant 100) = P(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}) = 0,001$

On obtient à l'aide de la calculatrice : $\dfrac{-20}{\sigma} \approx -3,09 \iff \sigma \approx \dfrac{-20}{-3,09} \approx 6,47$

▷ **Exercice 5.** La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(2;9)$.



1. Déterminer $P(X \le 1)$, $P(X > 2)$, $P(X \ge -1)$.

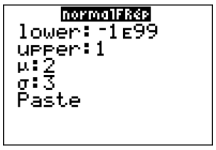
$X \sim \mathcal{N}(2;9) = \mathcal{N}(2;3^2)$ d'où $\begin{cases} \mu = 2 \\ \sigma = 3 \end{cases}$.

On obtient à la calculatrice :

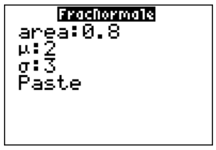
- $P(X \le 1) \approx 0,369$
- $P(X > 2) = 0,5$
- $P(X \ge -1) = P(X \ge \mu - \sigma) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma)$

  donc $P(X \ge -1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times 0,683 \approx 0,842$

$P(X \le 1)$



$P(X \le \alpha) = 0,8$



2. Déterminer α tel que $P(X \le \alpha) = 0,8$.

$\alpha \approx 4,525$ (FracNormale ...)

3. Déterminer β tel que $P(X > \beta) = 0,1$.

$P(X > \beta) = 0,1 \iff P(X \leqslant \beta) = 1 - 0,1 = 0,9$

A l'aide de la calculatrice, on obtient : $\beta \approx 5,845$

▷ **Exercice 6.** Lors d'un jeu télévisé, 60% des candidats ont gagné moins de 500€. Les gains suivent une loi normale d'écart-type 300€. Calculer l'espérance de gain à ce jeu.

Notons X la variable aléatoire égale au gain d'un candidat. X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,300)$ où l'espérance μ est à déterminer.

On sait que $P(X \le 500) = 0,6$

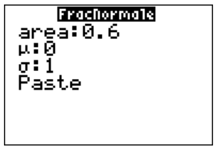
$$\begin{aligned} X \le 500 &\iff X - \mu \le 500 - \mu \\ &\iff \frac{X-\mu}{300} \le \frac{500-\mu}{300} \\ &\iff Z \le \frac{500-\mu}{300} \end{aligned}$$

Ainsi $P(X \le 500) = P\left(Z \le \dfrac{500-\mu}{300}\right) = 0,6$ où Z est la variable aléatoire centrée réduite de X donc $Z \sim \mathcal{N}(0\,;\,1)$

On obtient à l'aide de la calculatrice : $\dfrac{500-\mu}{300} \approx 0,253$

d'où $500 - \mu \approx 300 \times 0,253$ soit $\mu \approx 424,1$

L'espérance de gain est donc environ égale à 424 €.



▷ **Exercice 7.** Dans une entreprise, la demande mensuelle X de pièces automobiles du même type suit une loi normale d'espérance $\mu = 600$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1. Sans faire de calcul, donner la probabilité que le nombre de pièces demandées soit compris entre 520 et 680.

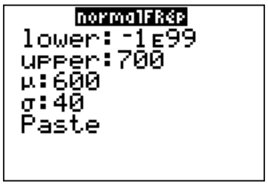
$P(520 \leqslant X \leqslant 680) = P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$

2. Sans faire de calcul, donner la probabilité que le nombre de pièces demandées soit compris entre 480 et 720.

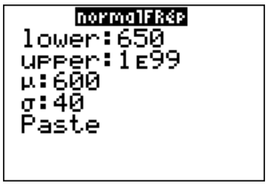
$P(480 \leqslant X \leqslant 720) = P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0,997$

3. Calculer $P(X \le 700)$, $P(X \ge 650)$ et $P(X \ge 550)$.

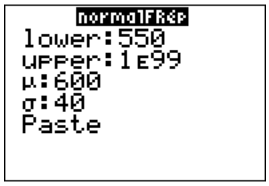
$P(X \le 700) \approx 0,994$



$P(X \ge 650) \approx 0,106$

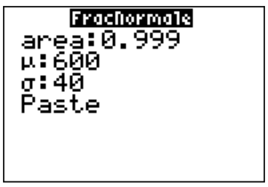


$P(X \ge 550) \approx 0,894$



4. Déterminer la valeur de α telle que $P(X \le \alpha) = 0,999$.

$\alpha \approx 724$



▷ **Exercice 8.** On dispose de deux machines M_1 et M_2 pour produire les médailles. Une médaille est dite conforme lorsque sa masse est comprise entre 9,9 et 10,1 grammes.

1. Après plusieurs séries de tests, on estime que la machine M_1 produit des médailles dont la masse X en grammes suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,06.

On note C l'évènement « la médaille est conforme ».

Calculer la probabilité qu'une médaille produite par la machine M_1 ne soit pas conforme. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} près.

$P(C) = P(9,9 \leq X \leq 10,1)$ avec $X \sim \mathcal{N}(10\,;\,0,06^2)$.

On obtient à la calculatrice : $P(C) = 0,904$. La probabilité qu'elle ne soit pas conforme est donc $P\left(\overline{C}\right) = 1 - P(C) \approx 0,096$

2. La proportion des médailles non conformes produites par la machine M_1 étant jugée trop importante, on utilise une machine M_2 qui produit des médailles dont la masse Y en grammes suit la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type σ.

a) Soit Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{Y-10}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par la variable Z?

Z est la variable aléatoire centrée réduite de Y donc $Z \sim \mathcal{N}(0\,;\,1)$

b) Sachant que cette machine produit 6 % de pièces non conformes, déterminer la valeur arrondie au millième de σ.

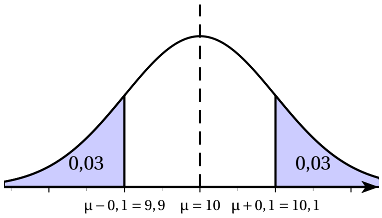
$P\left(\overline{C}\right) = 1 - P(C) = 0,06$ donc $P(C) = P(9,9 \leq Y \leq 10,1) = 0,94$.

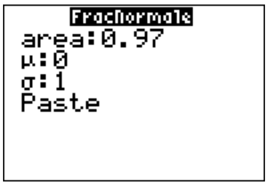
A l'aide de la courbe ci-dessous et de ses propriétés de symétrie, on en déduit par exemple que $P(Y \leq 10,1) = 0,97$.

Or, $Y \leq 10,1 \iff Y - 10 \leq 0,1 \iff \dfrac{Y-10}{\sigma} \leq \dfrac{0,1}{\sigma} \iff Z \leq \dfrac{0,1}{\sigma}$

Ainsi $P(Y \leq 10,1) = P\left(Z \leq \dfrac{0,1}{\sigma}\right) = 0,97$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0\,;\,1)$.

On obtient à l'aide de la calculatrice : $\dfrac{0,1}{\sigma} \approx 1,881 \iff \sigma \approx \dfrac{0,1}{1,881} \approx 0,053$





▷ **Exercice 9.** Soit X la variable aléatoire égale au nombre de films vus au cinéma dans l'année, par un élève pris au hasard dans un lycée. X suit une loi normale d'espérance 9 et d'écart-type σ. La probabilité qu'un élève ait vu moins de 8 films est égale à 0,362.

1. Soit $Z = \dfrac{X-9}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par Z?

Z est la variable aléatoire centrée réduite de X donc $Z \sim \mathcal{N}(0\,;\,1)$

2. Montrer que $P(X < 8) = P\left(Z < \dfrac{-1}{\sigma}\right)$.

$X \leq 8 \iff X - 9 \leq -1 \iff \dfrac{X-9}{\sigma} \leq -\dfrac{1}{\sigma} \iff Z \leq -\dfrac{1}{\sigma}$

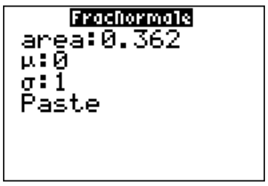
Ainsi $P(X \leq 8) = P\left(Z \leq -\dfrac{1}{\sigma}\right) = 0,362$.

3. Déterminer σ.

On a démontré que $P\left(Z \leq -\dfrac{1}{\sigma}\right) = 0,362$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0\,;\,1)$:

On obtient à l'aide de la calculatrice :

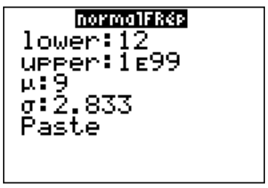
$-\dfrac{1}{\sigma} \approx -0,353 \iff \sigma \approx \dfrac{1}{0,353} \approx 2,833$



4. Calculer la probabilité qu'un élève ait vu au moins 12 films dans l'année.

$X \sim \mathcal{N}(9\,;\,2,833)$ et à la calculatrice, on obtient :

$P(X \geq 12) \approx 0,145$



▷ **Exercice 10. PARTIE A :** On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;6]$ par $f(x)=1-(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que $f'(x)=x\mathrm{e}^{-x}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

   $\forall x\in[\,0\,;\,6\,],\, f(x)=1\underbrace{-(x+1)\mathrm{e}^{-x}}_{(uv)'=u'v+uv'}.$

   donc $f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}-(x+1)\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)=-\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}=x\mathrm{e}^{-x}$

2. Démontrer que l'équation $f(x)=0,5$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\,;6]$.

   Déterminer une valeur arrondie de α à 0,01.

   Pour tout $x\in[\,0\,;\,6\,]$, $x\geq 0$ et $\mathrm{e}^{-x}>0$ donc $f'(x)\geq 0$.

x	0	α	6
$f'(x)$	0	+	
f	0 ↗	0,5 ↗	0,983

   f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[\,0\,;\,6\,]$.
   De plus, $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(6)\approx \end{cases}$ donc 0,5 est compris entre $f(0)$ et $f(6)$.
   Ainsi, d'après le théorème de la bijection (ou théorème des valeurs intermédiaires) l'équation $f(x)=0,5$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[\,0\,;\,6\,]$.

   On obtient à l'aide de la calculatrice : $1,678\leq\alpha\leq 1,679$ donc $\alpha\approx 1,68$ à 10^{-2} près.

3. On admet que la fonction F définie sur $[0\,;6]$ par $\mathrm{F}(x)=x+(x+2)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur $[0\,;6]$. Donner la valeur exacte puis une valeur arrondie à 10^{-3} de $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x=\left[x+(x+2)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^6=6+8\mathrm{e}^{-6}-2=4+8\mathrm{e}^{-6}\approx 4,020$

PARTIE B : Une entreprise lance la production de batteries pour véhicules électriques.

Une étude a modélisé le rythme de la production journalière sur les six premiers mois à l'aide de la fonction f définie dans la partie A pour x compris entre 0 et 6.

x représente le nombre de mois (de 30 jours) depuis le lancement du produit.

$f(x)$ représente la production journalière de batteries en milliers.

1. Exprimer en mois puis en jours le moment où la production atteindra 0,5 millier soit 500 unités.

   La production atteindra 0,5 millier soit 500 unités lorsque le nombre de jours x vérifiera $f(x)\geq 0,5$. D'après l'étude de f à la Partie A, ceci est vérifié pour $x\geq\alpha$ soit 1,68 mois soit environ 50 jours.

2. Déterminer une valeur arrondie à 10^{-3} de la valeur moyenne, exprimée en milliers, de la production sur les six premiers mois.

   La valeur moyenne est donnée par la formule : $\mu=\dfrac{1}{6-0}\displaystyle\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}\times\left(4+8\mathrm{e}^{-6}\right)\approx 0,669972$ soit une production moyenne d'environ $0,669972\times 1000=669,972$ c'est à dire 670 batteries.

PARTIE C : Il est prévu que l'autonomie permise par ce type de batteries, sous certaines conditions de conduite, soit de 200 km.

Sur un parcours joignant une ville située à 160 km, on suppose que l'autonomie, exprimée en km, permise par ces batteries suit une loi normale d'espérance $\mu=200$ et d'écart-type $\sigma=40$.

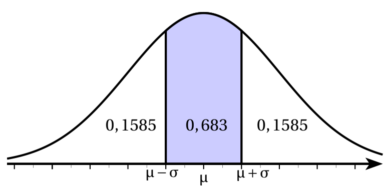
1. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de ne pas atteindre cette ville ?

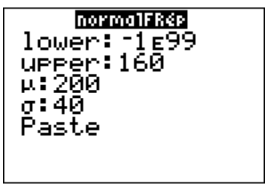
   Notons X la variable aléatoire égale à l'autonomie en km. On sait que $\mathrm{X}\sim\mathcal{N}\left(200\,;\,40^2\right)$.

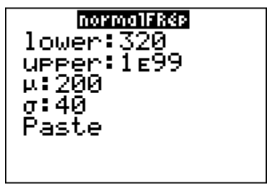
   En s'aidant des propriétés de la courbe :

   $\mathrm{P}(\mathrm{X}<160)=\mathrm{P}(\mathrm{X}<200-40)=\mathrm{P}(\mathrm{X}<\mu-\sigma)\approx\dfrac{1}{2}(1-0,683)\approx 0,159$

   Ou directement à la calculatrice... : $\mathrm{P}(\mathrm{X}<160)\approx 0,159$







2. La probabilité de pouvoir faire l'aller-retour jusqu'à cette ville sans recharge des batteries est-elle supérieure à 0,01 ? Justifier votre réponse.

   $\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 2\times 160)=\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 320)\approx 0,0013<0,01$

▷ **Exercice 11. Partie A :** On étudie une maladie dans la population d'un pays. On a constaté que le taux, en nanogrammes par millilitre $\left(\text{ng.mL}^{-1}\right)$, d'une substance Gamma présente dans le sang est plus élevé chez les personnes atteintes de cette maladie que chez les personnes qui n'en sont pas atteintes.

1. Le taux de cette substance Gamma dans la population des personnes qui ne sont pas atteintes par la maladie est modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 40$ et d'écart-type $\sigma = 8$.

On choisit au hasard une personne parmi celles qui ne sont pas atteintes par la maladie étudiée.

Calculer la probabilité que le taux dans le sang de la substance Gamma soit supérieur à 60 ng.mL^{-1}.

A l'aide de la calculatrice, on obtient : $P(T \geq 60) \approx 0,006$

2. Des études ont mis en évidence que le taux moyen de la substance Gamma chez les personnes atteintes par la maladie étudiée est de 50 ng.mL^{-1} et que 10 % d'entre elles ont un taux de substance Gamma inférieur à 43 ng.mL^{-1}.

On appelle T' la variable aléatoire qui modélise le taux de la substance Gamma en ng.mL^{-1} chez une personne atteinte par la maladie étudiée.

On admet que T' suit la loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ'.

Préciser la valeur de μ' et déterminer la valeur de σ'.

- On sait que le taux moyen de la substance Gamma chez les personnes atteintes par la maladie étudiée est de 50 ng.mL^{-1} donc $\mu' = 50$.
- De plus, 10 % d'entre elles ont un taux de substance Gamma inférieur à 43 ng.mL^{-1} soit $P(X \leqslant 43) = 0,1$.
  or $X \leqslant 43 \iff X - 50 \leqslant -7 \iff \dfrac{X-50}{\sigma'} \leqslant \dfrac{-7}{\sigma'} \iff Z \leqslant \dfrac{-7}{\sigma'}$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0\,;\,1)$.
  Ainsi $P(X \leqslant 43) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-7}{\sigma'}\right) = 0,1$. On obtient à la calculatrice (Fracnormal) : $\dfrac{-7}{\sigma'} \approx -1,28155 \iff \sigma' \approx 5,46$

Partie B : Pour dépister chez une personne la maladie étudiée, on effectue une prise de sang. On considère que le dépistage est positif si le taux de la substance Gamma est supérieur ou égal à 45 ng.mL^{-1}.

Une personne étant choisie au hasard dans la population, on appelle :

- M l'évènement « le patient est atteint par la maladie étudiée » ;
- D l'évènement « le patient a un dépistage positif ».

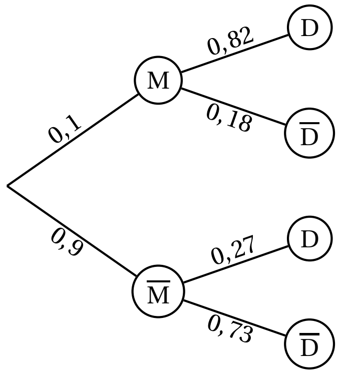
On admet que :

- 82 % des personnes atteintes par la maladie étudiée ont un dépistage positif ;
- 73 % des personnes non atteintes par cette maladie ont un dépistage négatif.

On sait de plus que 10 % de la population étudiée est atteinte par cette maladie.

1. Démontrer que la probabilité qu'un patient ait un dépistage positif est de 0,325.

On représente la situation par un arbre pondéré :



D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(M \cap D) + P\left(\overline{M} \cap D\right) \\ &= P(M) \times P_D(M) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(D) \\ &= 0,1 \times 0,82 + 0,9 \times 0,27 \\ &= 0,325 \end{aligned}$$

2. Calculer $P_{\overline{D}}(M)$. Interpréter ce résultat.

$P_{\overline{D}}(M) = \dfrac{P\left(M \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \dfrac{P(M) \times P_M\left(\overline{D}\right)}{1 - P(D)} = \dfrac{0,1 \times 0,18}{1 - 0,325} \approx 0,027$ ce qui signifie que pour une personne dépistée négative, la probabilité qu'elle soit malade est environ égale à 0,027.

3. Un patient a un dépistage positif. Le médecin le rassure en lui indiquant qu'il n'a qu'une chance sur quatre d'avoir contracté la maladie. Qu'en pensez- vous ?

$P_D(M) = \dfrac{P(M \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(M) \times P_D(M)}{P(D)} = \dfrac{0,1 \times 0,82}{0,325} \approx 0,252$ donc le médecin a raison.

▷ **Exercice 12.** Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %.

Partie A : À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.

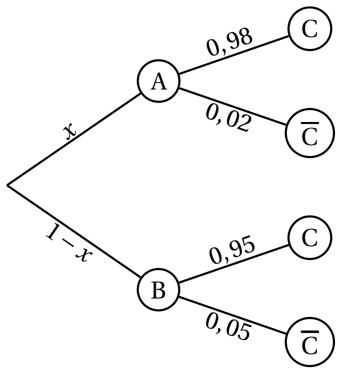
La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98.
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :
A l' évènement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A » ;
C l'évènement : « la tablette de chocolat est commercialisable ».
On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1. Montrer que $P(C) = 0,03x + 0,95$.

On représente cette situation à l'aide d'un arbre pondéré :



D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A \cap C) + P(B \cap C) \\ &= P(A) \times P_A(C) + P_B(C) \\ &= x \times 0,98 + (1-x) \times 0,95 \\ &= 0,98x - 0,95x + 0,95 \\ &= 0,03x + 0,95 \end{aligned}$$

2. À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable.

Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

$P(C) = 0,96 \iff 0,03x + 0,95 = 0,96 \iff x = \dfrac{1}{3}$ ainsi $P(A) = \dfrac{1}{3}$ et $P(B) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3} = 2 \times P(A)$.

Partie B : Une machine électronique mesure la teneur en cacao d'une tablette de chocolat. Sa durée de vie, en années, peut être modélisée par une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1. La durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle.

$E(Z) = \dfrac{1}{\lambda}$ donc on a $\dfrac{1}{\lambda} = 5 \iff \lambda = \dfrac{1}{5} = 0,2$

2. Calculer $P(Z > 2)$.

$P(Z > 2) = e^{-\lambda \times 2} = e^{-0,2 \times 2} = e^{-0,4} \approx 0,670$

3. Sachant que la machine de l'atelier a déjà fonctionné pendant 3 ans, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 ans ?

$P_{Z \geqslant 3}(Z > 5) = P_{Z \geqslant 3}(Z > 3 + 2) = P(Z > 2)$ car la loi exponentielle est sans vieillissement.

Ainsi $P_{Z \geqslant 3}(Z > 5) \approx 0,670$.

Partie C : On note X la variable aléatoire donnant la teneur en cacao, exprimée en pourcentage, d'une tablette de 100 g de chocolat commercialisable. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 85$ et d'écart type $\sigma = 2$.

1. Calculer $P(83 < X < 87)$.

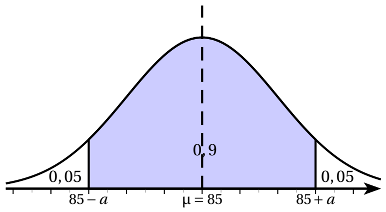
   Quelle est la probabilité que la teneur en cacao soit différente de plus de 2 % du pourcentage annoncé sur l'emballage ?

   D'après le cours, $P(83 < X < 87) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 683$.

   Ainsi la probabilité que la teneur en cacao soit différente de plus de 2 % du pourcentage annoncé sur l'emballage est $1 - P(83 < X < 87) \approx 0,317$

2. Déterminer une valeur approchée au centième du réel a tel que : $P(85 - a < X < 85 + a) = 0,9$.

   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.



En utilisant les propriétés de symétrie de la densité de probabilité :

$P(85 - a < X < 85 + a) = 0,9 \iff P(X < 85 + a) = 0,95$

On obtient à la calculatrice (Fracnormal) : $85 + a \approx 88,28971$ soit $a \approx 3,290$.

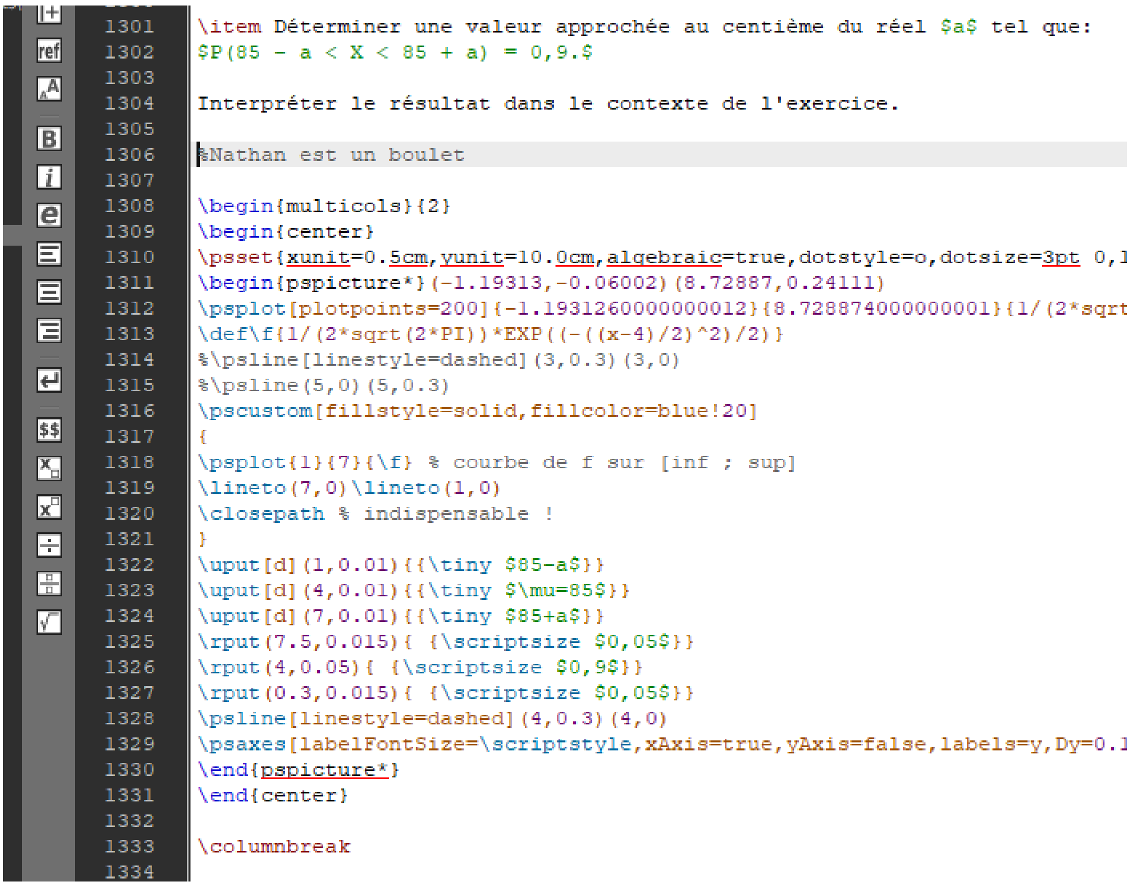
D'où $P(81,72 < X < 88,29) = 0,9$ ce qui signifie que 90% des tablettes ont une teneur en cacao comprise entre 81,72% et 88,29%.

3. La chocolaterie vend un lot de 10 000 tablettes de chocolat à une enseigne de la grande distribution. Elle affirme au responsable achat de l'enseigne que, dans ce lot, 90 % des tablettes ont un pourcentage de cacao appartenant à l'intervalle [81,7 ; 88,3].

   Afin de vérifier si cette affirmation n'est pas mensongère, le responsable achat fait prélever 550 tablettes au hasard dans le lot et constate que, sur cet échantillon, 80 ne répondent pas au critère.

   Au vu de l'échantillon prélevé, que peut-on conclure quant à l'affirmation de la chocolaterie ?

   # Question à laquelle on pourra répondre dans le prochain chapitre. Tu as capté Nathan H ?



```
\item Déterminer une valeur approchée au centième du réel $a$ tel que:
$P(85 - a < X < 85 + a) = 0,9.$

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

%Nathan est un boulet

\begin{multicols}{2}
\begin{center}
\psset{xunit=0.5cm,yunit=10.0cm,algebraic=true,dotstyle=o,dotsize=3pt 0,1
\begin{pspicture*}(-1.19313,-0.06002)(8.72887,0.24111)
\psplot[plotpoints=200]{-1.1931260000000012}{8.728874000000001}{1/(2*sqrt
\def\f{1/(2*sqrt(2*PI))*EXP((-((x-4)/2)^2)/2)}
%\psline[linestyle=dashed](3,0.3)(3,0)
%\psline(5,0)(5,0.3)
\pscustom[fillstyle=solid,fillcolor=blue!20]
{
\psplot{1}{7}{\f} % courbe de f sur [inf ; sup]
\lineto(7,0)\lineto(1,0)
\closepath % indispensable !
}
\uput[d](1,0.01){{\tiny $85-a$}}
\uput[d](4,0.01){{\tiny $\mu=85$}}
\uput[d](7,0.01){{\tiny $85+a$}}
\rput(7.5,0.015){ {\scriptsize $0,05$}}
\rput(4,0.05){ {\scriptsize $0,9$}}
\rput(0.3,0.015){ {\scriptsize $0,05$}}
\psline[linestyle=dashed](4,0.3)(4,0)
\psaxes[labelFontSize=\scriptstyle,xAxis=true,yAxis=false,labels=y,Dy=0.1
\end{pspicture*}
\end{center}

\columnbreak
```