Lois à densité

▷ **Exercice 1.**

Dans un parc d'attraction, le temps d'attente X pour monter sur la grande roue, exprimé en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1;11]$.

1. X suit une loi uniforme. Quelle est sa fonction de densité f ?

La fonction densité de probabilité f d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur un intervalle $[\ a\ ;\ b\ ]$ est la fonction constante définie par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$. Ici, $f(x) = \dfrac{1}{11-1} = \dfrac{1}{10}$.

2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit compris entre trois et cinq minutes ?

$\mathrm{P}(3 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 5) = \dfrac{d-c}{b-a} = \dfrac{5-3}{11-1} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

3. Quelle est la probabilité qu'un client attende plus de huit minutes ?

$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 8) = \mathrm{P}(8 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 10) = \dfrac{11-8}{11-1} = \dfrac{3}{10}$

4. Un client a déjà attendu 5 minutes. Quelle est la probabilité qu'il attende moins de 10 minutes ?

$$\mathrm{P}_{x\geqslant 5}(\mathrm{X} \leqslant 10) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 5\,\mathrm{ET}\,\mathrm{X} \leqslant 10)}{\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 5)} = \frac{\mathrm{P}(5 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 10)}{\mathrm{P}(5 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 11)} = \frac{\dfrac{10-5}{11-1}}{\dfrac{11-5}{11-1}} = \frac{5}{6}$$

5. Préciser le temps d'attente moyen.

$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{1+11}{2} = 6$. Le temps d'attente moyen est donc de 6 minutes.

▷ **Exercice 2.**

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = 3x^2$ est une fonction densité de probabilité sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 1\ ]$.

f est continue (car dérivable) et positive sur $[\ 0\ ;\ 1\ ]$. De plus, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \left[\ x^3\ \right]_0^1 = 1$ donc f est bien une densité de probabilité.

2. Une variable aléatoire X a pour densité de probabilité la fonction f.

a) Que vaut $p(\mathrm{X} = 0,5)$?
$p(\mathrm{X} = 0,5) = 0$ car si X a une densité de probabilité, la probabilité d'une valeur isolée est nulle.

b) Calculer $p(\mathrm{X} \in [\ 0,3\ ;\ 0,8\ ])$?
$p(\mathrm{X} \in [\ 0,3\ ;\ 0,8\ ]) = \displaystyle\int_{0,3}^{0,8} f(x)\ \mathrm{d}x = \left[\ x^3\ \right]_{0,3}^{0,8} = 0,8^3 - 0,3^3 = 0,485$.

c) Déterminer l'espérance de X.
$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \displaystyle\int_0^1 x f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 3x^3\ \mathrm{d}x = \left[\frac{3}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{4}$.

▷ **Exercice 3.** Soit a un réel positif et f la fonction définie sur $[\,0\,;\,2\,]$ par $f(x) = ax(2-x)$.

1. Déterminer a pour que f soit la densité d'une loi de probabilité sur l'intervalle $[\,0\,;\,2\,]$.

$\forall\, x \in [\,0\,;\,2\,]$, $f(x) = ax(2-x) = -ax^2 + 2ax$

f est continue car dérivable et pour que f soit une densité de probabilité, la condition $\displaystyle\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 1$ doit être vérifiée. Nous vérifierons ensuite que la fonction f est bien positive.

$$\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 1 \Longleftrightarrow \left[-\frac{1}{3}ax^3 + ax^2\right]_0^2 = 1 \Longleftrightarrow -\frac{1}{3}a \times 8 + 4a = 1 \Longleftrightarrow \frac{4}{3}a = 1 \Longleftrightarrow a = \frac{3}{4}$$

Ainsi $f(x) = \dfrac{3}{4}x(2-x) = -\dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{3}{2}x$. f est donc une fonction polynômiale du second degré qui s'annule pour $x = 0$ et $x = 2$. Elle est donc du signe contraire de $a = -\dfrac{3}{4}$ donc positive entre 0 et 2.

En conclusion, f ainsi définie est bien une densité de probabilité.

2. X est une variable aléatoire de densité f.

a) Calculer $\mathrm{P}(\,1 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 2\,)$. $\mathrm{P}(\,1 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 2\,) = \displaystyle\int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2\right]_1^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X} > 0,5)$.

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 0,5) = \mathrm{P}(\,0,5 < \mathrm{X} \leqslant 2\,) = \int_{0,5}^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2\right]_{0,5}^2 = 1 - \frac{5}{32} = \frac{27}{32} = 0,84375$$

c) Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{X})$.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_0^2 xf(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{3}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^3\right]_0^2 = 1$$

▷ **Exercice 4.** Soit f définie sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

1. Soit $a \in [\,1\,;\,+\infty\,[$. On note $\mathrm{I}(a) = \displaystyle\int_1^a f(x)\ \mathrm{d}x$. Calculer $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \mathrm{I}(a)$.

$$\mathrm{I}(a) = \int_1^a f(x)\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = -\frac{1}{a} + 1 \text{ et } \lim_{a\to+\infty} \mathrm{I}(a) = 1$$

2. En déduire que f est une densité de probabilité.

f est continue car dérivable sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ et positive. De plus, l'aire sous la courbe, donnée en unités d'aire par $\displaystyle\int_1^a f(x)\ \mathrm{d}x$ est égale à 1 donc f est bien une densité de probabilité.

3. Soit la variable aléatoire X qui a pour densité de probabilité la fonction f.

Déterminer le réel m tel que $p(\mathrm{X} \geqslant m) = \dfrac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
p(\mathrm{X} \geqslant m) = \frac{1}{2} &\Longleftrightarrow 1 - p(\mathrm{X} < m) = \frac{1}{2} \\
&\Longleftrightarrow p(1 \leqslant \mathrm{X} < m) = \frac{1}{2} \\
&\Longleftrightarrow \int_1^m f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \\
&\Longleftrightarrow \left[-\frac{1}{x}\right]_1^m = \frac{1}{2} \\
&\Longleftrightarrow -\frac{1}{m} + 1 = \frac{1}{2} \\
&\Longleftrightarrow -\frac{1}{m} = -\frac{1}{2} \\
&\Longleftrightarrow m = 2
\end{aligned}
$$