FICHE TECHNIQUES ET METHODES

Comparaison de deux fonctions : élaboration d'un tableau de signes

théorème 1 *Soient deux fonctions f et g définies localement sur un même intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, et soient $\mathcal{C}_f$ courbe représentative de f et $\mathcal{C}_g$ courbe représentative de g dans un repère orthonormé $\left(O\vec{i}\,\vec{j}\right)$:*

1. *si $f(x) \geq g(x)$ alors $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de $\mathcal{C}_g$*
2. *si $f(x) \leq g(x)$ alors $\mathcal{C}_f$ est **au-dessous** de $\mathcal{C}_g$*
3. *si $f(x) = g(x)$ alors $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ **se croisent***

L'étude du signe d'une fonction repose sur la résolution d'inéquations comportant éventuellement des termes en x au dénominateur. Dans ce cas la méthode générale consiste :

1. à regrouper les termes d'un seul côté de l'inéquation
2. à factoriser cette expression
3. à citer et exclure du champs des solutions les *valeurs interdites*
4. à étudier séparément le signe de chacun des facteurs
5. à regrouper ces études dans un seul tableau qui couvre tout l'intervalle d'étude : les valeurs interdites si elles y figurent sont repérées par une *double barre* de façon à bien visualiser qu'elles ne seront pas prises en compte dans l'ensemble solution.

EXEMPLE

Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $[-1\,;\,0[$ par :

$$f(x) = x \qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

dans l'intervalle $[-1\,;\,0[$ a-t-on $f(x) \geq g(x)$ ou bien $g(x) \geq f(x)$?

Si $f(x) \geq g(x)$ alors :

$$f(x) - g(x) = x - \tfrac{1}{x}$$

$$= \tfrac{x^2-1}{x}$$

$$= \tfrac{(x-1).(x+1)}{x}$$

alors sur l'intervalle $[-1\,;\,0[$ de définition on a :

x	1		0
x		$-$	‖
$x-1$	0	$+$	‖
$x+1$		$-$	‖
$f(x)-g(x) = x - \frac{1}{x}$		$+$	‖

On peut conclure de cette étude de signes que l'expression est positive sur $[-1\,;\,0[$ c'est à dire qu'on a :

$$f(x) - g(x) \geq 0 \quad \textit{donc} \quad f(x) \geq g(x)$$

conséquences : dans cet intervalle la courbe représentative de $f(x)$ sera au dessus de celle de $g(x)$