Exercice 4

Une enquête a été réalisée auprès de français s'étant rendus à Londres pour des raisons touristiques.Cette enquête révèle que, pour se rendre dans la capitale anglaise,

- 30 % de ces touristes ont utilisé l'avion,
- 50 % ont utilisé le train passant par le tunnel sous la Manche,
- et les autres touristes ont traversé la Manche par bateau.

Parmi les touristes interrogés ayant utilisé l'avion, 20 % sont restés en Angleterre plus d'une semaine, parmi ceux qui ont choisi le train, 60 % sont restés en Angleterre plus d'une semaine, et parmi ceux qui ont utilisé le bateau 20% sont restés en Angleterre plus d'une semaine.

On interroge au hasard un touriste ayant répondu à l'enquête.

On suppose que chaque touriste avait la même probabilité d'être choisi.

On note :

- A l'événement : « Le touriste interrogé a voyagé en avion » .
- T l'événement : « Le touriste interrogé a voyagé en train ».
- B l'événement : « Le touriste interrogé a voyagé en bateau ».
- S l'événement : « Le touriste interrogé est resté en Angleterre plus d'une semaine .

1. Déterminer la probabilité que le touriste interrogé ait voyagé en bateau pour se rendre en Angleterre.

On cherche P(B) :

Sur l'ensemble des touristes français se rendant en Angleterre, 30 % d'entre eux utilisent l'avion et 50 % ont utilisé le train. Il en résulte que 20 % d'entre eux ont utilisé le bateau donc :

P(B) = 20 % = 0,2

2. ***a.*** Exprimer à l'aide d'une phrase l'événement $A \cap S$.

$A \cap S$ désigne l'événement : « le touriste interrogé a voyagé en avion et est resté plus d'une semaine en Angleterre ».

b. Déterminer les probabilités $P(A \cap S)$ et $P(T \cap S)$. (on pourra utiliser un tableau à double entrée).

On va raisonner sur x touristes :

- 30 % de ces touristes ont utilisé l'avion : $0{,}3\,x$
- 50 % ont utilisé le train passant par le tunnel sous la Manche : $0{,}5\,x$
- et les autres touristes ont traversé la Manche par bateau : $0{,}2\,x$

Parmi les touristes interrogés ayant utilisé l'avion, 20 % sont restés en Angleterre plus d'une semaine :

Comme il y a $0{,}3x$ touristes qui ont utilisé l'avion, alors il y a $0{,}2 \times 0{,}3\,x$ soit $0{,}06\,x$ qui sont restés en Angleterre plus d'une semaine et donc il y aura $0{,}3x - 0{,}06\,x$ soit $0{,}24\,x$ qui sont restés moins d'une semaine.

Parmi ceux qui ont choisi le train, 60 % sont restés en Angleterre plus d'une semaine :

Comme il y a $0{,}5x$ touristes qui ont utilisé le train, alors il y a $0{,}6 \times 0{,}5\,x$ soit $0{,}3\,x$ qui sont restés en Angleterre plus d'une semaine et donc $0{,}5\,x - 0{,}3x$ soit $0{,}2x$ qui sont restés moins d'une semaine.

Parmi ceux qui ont utilisé le bateau 20% sont restés en Angleterre plus d'une semaine.

Comme il y a $0{,}2x$ touristes qui ont utilisé le bateau, alors il y a $0{,}2 \times 0{,}2\,x$ soit $0{,}04\,x$ qui sont restés en Angleterre plus d'une semaine et donc $0{,}2\,x - 0{,}04x$ soit $0{,}16x$ qui sont restés moins d'une semaine.

Mode de transport / Durée de séjour	A	T	B	Total
S	$0{,}06\,x$	$0{,}3x$	$0{,}04x$	$0{,}4\,x$
$\overline{S}$	$0{,}24\,x$	$0{,}2x$	$0{,}16x$	$0{,}6x$
Total	$0{,}3\,x$	$0{,}5x$	$0{,}2x$	x

Comme on suppose que chaque touriste a la même probabilité d'être choisi.

On est en situation d'équiprobabilité, donc :

P($A \cap S$)= $\dfrac{\text{" nombre de touristes ayant pris l'avion et qui sont restés plus d'une semaine "}}{\text{" nombre total de touristes français "}} = \dfrac{0{,}06x}{x} = 0{,}06$

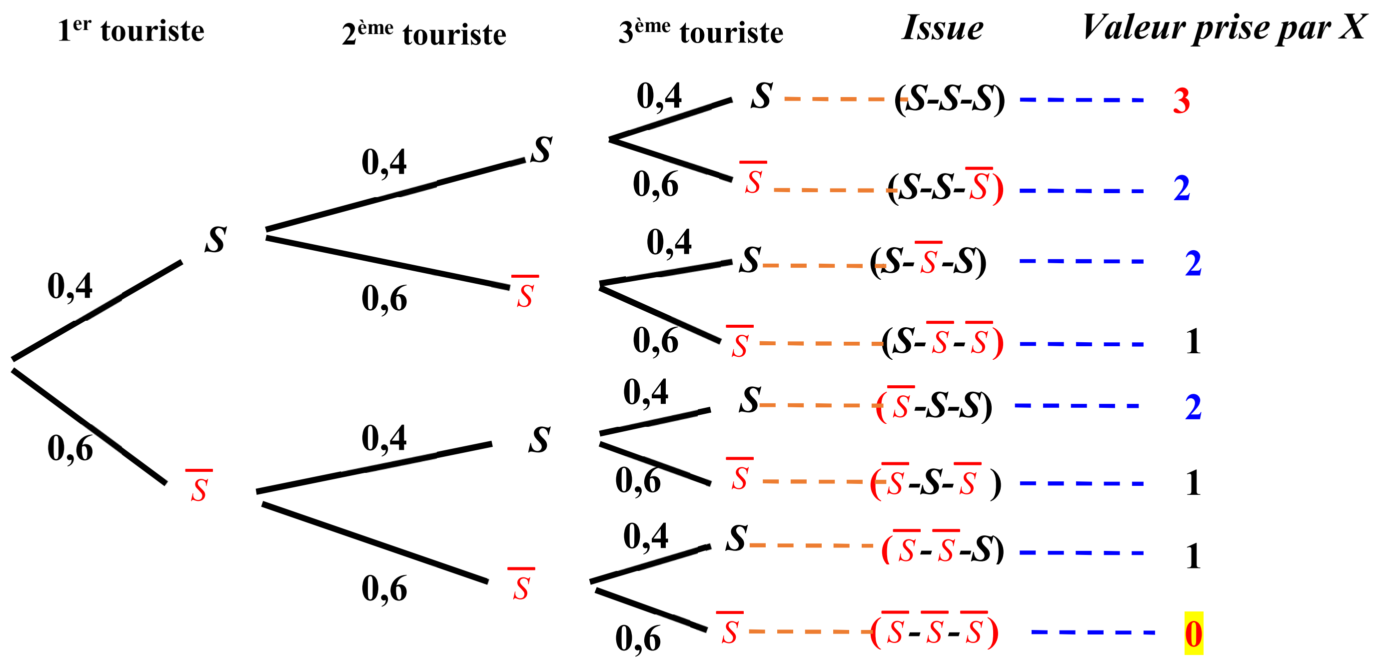
P($T \cap S$) = $\dfrac{\text{" nombre de touristes ayant pris le train et qui sont restés plus d'une semaine "}}{\text{" nombre total de touristes français "}} = \dfrac{0{,}3x}{x} = 0{,}3$

3. Montrer que $P(S) = 0{,}4$.

$P(S)$= $\dfrac{\text{" nombre total de touristes français étant restés plus d'une semaine "}}{\text{" nombre total de touristes français "}} = \dfrac{0{,}4x}{x}$

4. On interroge au hasard 3 touristes ayant répondu à l'enquête de façon indépendante. On suppose que le nombre de personnes ayant répondu à l'enquête est suffisamment grand pour assimiler l'interrogation au hasard à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de touristes resté(s) en Angleterre plus d'une semaine.

On considère l'expérience suivante : On interroge au hasard un touriste et on cherche à savoir s'il a séjourné plus d'une semaine en Angleterre.
Au regard de l'énoncé (on peut assimilier l'interrogation au hasard à un tirage avec remise), on peut considèrer que l'on répète l' expérience trois fois de suite dans des conditions identiques et indépendantes.
Modélisons la situation à l'aide d'un arbre pondéré.



a. Déterminer la probabilité que parmi ces trois touristes se trouve un seul touriste étant resté en Angleterre plus d'une semaine.

Notons H l'événement : « un seul touriste sur les trois est resté en Angleterre plus d'une semaine »
H est réalisé lorsque X prend la valeur 1. Or (X=1) est réalisé par les issues (**S-$\overline{S}$-$\overline{S}$); ($\overline{S}$-S-$\overline{S}$) et ($\overline{S}$-$\overline{S}$-S)**
Comme les expériences se déroulent dans des conditions **<u>identiques</u>** et **<u>indépendantes</u>**, on a :
P(**S-$\overline{S}$-$\overline{S}$) = 0,4 ×0,6× 0,6 = 0,144**
De même, P($\overline{S}$-**S-$\overline{S}$) = 0,6 × 0,4 × 0,6 = 0,144 et P($\overline{S}$-$\overline{S}$-S)=0,6² × 0,4 = 0,144**
Finalement : P(H)= 3 × 0,144 = 0,432

b. Déterminer la probabilité que parmi ces trois touristes, au moins l'un d'entre eux soit resté en Angleterre plus d'une semaine.

Notons M l'événement : « au moins un des trois touristes est resté en Angleterre plus d'une semaine »

Alors $\overline{M}$ désigne l'événement contraire de M c'est-à-dire : « aucun des trois touristes n'est resté plus d'une semaine »

On a : $P(M) = 1 - P(\overline{M})$

Et $P(\overline{M}) = P(\overline{S}\text{-}\overline{S}\text{-}\overline{S})$ **= 0,6× 0,6 × 0,6 = 0,216**

Ainsi $P(M) = 1 - 0{,}216 = 0{,}784$

c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Méthode : Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X

1. c'est donner l'ensemble des valeur prises par X, cet ensemble se note $X(\Omega)$
2. Puis pour chacune des valeurs x_i prises par X, donner $P(X = x_i)$

D'après la **question 4**, on sait que $X(\Omega) = \{0\ ;1\ ;2\ ;3\}$

$P(X = 0) = P(\overline{M}) = 0{,}216$

$P(X=1) = P(H) = 0{,}432$

$P(X=2) = P(S\text{-}S\text{-}\overline{S})+P(S\text{-}\overline{S}\text{-}S)+P(\overline{S}\text{-}S\text{-}S)$

$= 0{,}4^2 \times 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}6 \times 0{,}4 + 0{,}6 \times 0{,}4^2 = 3 \times 0{,}4^2 \times 0{,}6 = 0{,}288$

Enfin

$P(X = 3) = P(S\text{-}S\text{-}S) = 0{,}4^3 = 0{,}064$

On peut dresser un tableau pour récapituler :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,216	0,432	0,288	0,064

Remarque : 0,216+0,432+0,288+0,064 = 1