

## • Exercice I

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 7$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par  $u_{n+1} = \frac{2u_n + 6}{5}$

1- Calculer  $u_1$  ;  $u_2$  ;  $u_3$

2- Le plan étant rapporté à  $u_n$  repère orthonormé  $(O, I, J)$  (unité 2cm)

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $g(x) = \frac{2x + 6}{5}$

a- Tracer la représentation graphique  $(D)$  de  $g$ , ainsi que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$ .

b- Placer les points d'abscisse respective  $u_0$  ;  $u_1$  ;  $u_2$  ;  $u_3$  sur l'axe des abscisses.

c- A quoi correspond sur ce graphique, le point d'intersection des droites  $(D)$  et  $(\Delta)$  ?

d- Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite  $u_n$  ?

3- On considère la suite définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = u_n - 2$

a- Exprimer  $u_n$  en fonction de  $v_n$ , puis  $v_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ , puis en fonction de  $v_n$

b- On admet que, pour tout  $n$  :  $v_n = 5\left(\frac{2}{5}\right)^n$ . En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ .

c- Déterminer la limite de  $u_n$ .

## • Exercice II

Dans son ouvrage intitulé « introduction à l'analyse des infinis », écrit en 1748, Euler pose le problème suivant :

« Un particulier doit 400 000 florins, dont il est convenu de payer tous les ans l'intérêt de 5% ; il acquitte tous les ans 25 000 florins ; on demande après combien d'années sa dette sera entièrement éteinte. »

Pour résoudre ce problème :

On pose  $S_0 = 400\,000$  la somme en florins qu'on supposera empruntée le 01/01/2000

On appelle  $S_n$  la somme restant à rembourser au 1<sup>er</sup> janvier de l'année  $(2000 + n)$ ,  $n$  est un entier.

1°) a- Expliquer pourquoi  $S_1 = 395\,000$

b- Calculer le montant des intérêts pour l'année  $(2000 + n)$  en fonction de  $S_n$ .

En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , la relation  $S_{n+1} = 1,05 S_n - 25\,000$

2°) On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $T_n = S_n - 500\,000$

On admet que, pour tout  $n$  :  $T_n = -100\,000 \times 1,05^n$ , en déduire la formule de  $S_n$  en fonction de  $n$ .

3°) La conclusion donnée par Euler est : « Le nombre d'années sera un peu moindre que 33 ; c'est à dire qu'au bout de 33 ans, la dette sera non seulement acquittée, mais le créancier sera tenu de rendre 318,8 florins. »

Justifier cette conclusion.