1. Résoudre les (in)équations suivantes :

a. $3x^2 - 4x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(3)(-1) = 16 + 12 = 28$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-\sqrt{28}}{2(3)} = \frac{4-\sqrt{4\times 7}}{6} = \frac{4-\sqrt{4}\times\sqrt{7}}{6} = \frac{4-2\sqrt{7}}{6} = \frac{2(2-\sqrt{7})}{2(3)} = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$

et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+\sqrt{28}}{2(3)} = \frac{4+\sqrt{4\times 7}}{6} = \frac{4+\sqrt{4}\times\sqrt{7}}{6} = \frac{4+2\sqrt{7}}{6} = \frac{2(2+\sqrt{7})}{2(3)} = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$

Conclusion : L'équation $3x^2 - 4x - 1 = 0$ admet 2 solutions à savoir les réels x_1 et x_2.

b. $9x^2 - 30x = -25$

équivaut à $9x^2 - 30x + 25 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-30)^2 - 4(9)(25) = 900 - 900 = 0$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-30)}{2(9)} = \frac{30}{18} = \frac{6(5)}{6(3)} = \frac{5}{3}$

Conclusion : L'équation $9x^2 - 30x + 25 = 0$ admet 1 seule solution à savoir le réel x_0.

c. $-6x^2 + x + 1 \leq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(-6)(1) = 1 + 24 = 25$

$x_3 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{25}}{2(-6)} = \frac{-1-5}{-12} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$

et $x_4 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{25}}{2(-6)} = \frac{-1+5}{-12} = \frac{4}{-12} = \frac{4(1)}{4(-3)} = -\frac{1}{3}$

L'équation $-6x^2 + x + 1 = 0$ admet 2 solutions à savoir les réels x_3 et x_4.

💣💣 💣💣 On ne résout pas une équation mais une inéquation. On cherche tous les réels x pour lesquels $-6x^2 + x + 1$ a un signe négatif. On doit déterminer le signe de $-6x^2 + x + 1$ 💣💣 💣💣:

Comme $a = -6$ est négatif, alors la parabole représentant la fonction $x \mapsto -6x^2 + x + 1$ a ses branches orientées vers le bas d'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_4		x_3		$+\infty$
Signe de $-6x^2 + x + 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

du signe de " a " à l'extérieur des racines.

Conclusion :

L'inéquation $-6x^2 + x + 1 \leq 0$ admet comme solutions l'ensemble des réels x de $]-\infty\,;\,-\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{2}\,;\,+\infty[$

d. $2x^2 + 3x + 4 < 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(2)(4) = 9 - 32 = -23$

L'équation $2x^2 + 3x + 4 = 0$ n'admet aucune solution réelle.

Comme $a = 2$ est positif, alors la parabole représentant la fonction $x \mapsto 2x^2 + 3x + 4$ a ses branches orientées vers le haut et de plus elle ne rencontre nullement l'axe des abscisses, d'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $2x^2 + 3x + 4$		$+$	

Conclusion : Comme pour tout réel x, $2x^2 + 3x + 4$ est toujours de signe positif, alors l'inéquation $2x^2 + 3x + 4 < 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

2. Donner le tableau de signe de $-x^2 + 4x$.

$-x^2 + 4x = -x(x-4)$

$-x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow -x(x-4) = 0 \Leftrightarrow -x = 0$ ou $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$

Ainsi, l'équation $-x^2 + 4x = 0$ admet 2 solutions à savoir 0 et 4.

Comme $a = -1 < 0$, alors la parabole représentant la fonction $x \mapsto -x^2 + 4x$ a ses branches orientées vers le bas d'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
Signe de $-x^2 + 4x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

du signe de " a " à l'extérieur des racines.