Structures algébriques
البنيات الجبرية

من اقتراح المنسقية الوطنية لمادة الرياضيات / وزارة التربية الوطنية / الرباط

Exercice:1 — التمرين 1:

نعتبر المصفوفتين : $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

1) احسب J^2 بدلالة I و J

2) بين أن (I,J) أسرة حرة في $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$

3) نعتبر المجموعة : $F=\left\{\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}/(a,b)\in IR^2\right\}$

أ) بين أن F فضاء متجهي جزئي من $(M_3(IR),+,.)$

ب) تحقق أن $I\in F$ و $J\in F$

ج) استنتج أساسا للفضاء المتجهي $(F,+,.)$

4) أ) بين أن $(F,+,\times)$ حلقة واحدية.

ب) بين أن J تقبل مقلوبا في F ثم حدد J^{-1} (يمكنك استعمال السؤال 1)

Exercice:2 — التمرين 2:

نذكر أن $(M_2(IR),+,\times)$ حلقة واحدية و $(M_2(IR),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي و $(C,+,\times)$ جسم تبادلي .

نضع : $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b\\-2b&a+2b\end{pmatrix}/(a,b)\in IR^2\right\}$ و $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}0&1\\-2&2\end{pmatrix}$

1) أ ـ بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(IR),+,.)$.

ب ـ بين أن الأسرة (I,J) أساس في الفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,.)$.

2) نعتبر التطبيق :
$$\begin{aligned} f: C &\longrightarrow E\\ a+bi &\rightarrow M(a-b,b)\end{aligned}$$

أ ـ بين أن E جزء مستقر من $(M_2(IR),\times)$

ب ـ بين أن f تشاكل تقابلي من $(C,\times)$ نحو $(E,\times)$.

3) بين أن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية .

4) أ ـ حل في المجموعة C المعادلة : $z^3=2-2i$ واكتب حلولها على الشكل الجبري .

ب ـ استنتج في المجموعة E حلول المعادلة : $M^3-4I+2J=0$

Exercice: 3 — التمرين 3:

لتكن E مجموعة الدوال العددية $f_{(a,b)}$ بحيث $\forall x\in IR: f_{(a,b)}(x)=(ax+b)e^{2x}$

1) a – بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

b – نضع $B=(f_{(1,0)},f_{(0,1)})$ بحيث $f_{(1,0)}(x)=xe^{2x}$ و $f_{(0,1)}(x)=e^{2x}$.

بين أن B أساس للفضاء المتجهي E .

2) نزود المجموعة E بقانون تركيب داخلي معرف كما يلي: $f_{(a,b)}Tf_{(c,d)}=f_{(ac-bd,bc+ad)}$ لكل $f_{(a,b)}$ و $f_{(c,d)}$ من E

Structures algébriques
البنيات الجبرية

من اقتراح المنسقية الوطنية لمادة الرياضيات / وزارة التربية الوطنية / الرباط

نعتبر التطبيق $E^* \longrightarrow E^*$ $\phi : C^*$ بحيث $\varphi(z) = f_{(a,b)}$ مع $z = a+ib$ مع $(a,b)\in IR^2$

$a-$ بين أن φ تشاكل تقابلي من $(C^*,\times)$ نحو (E^*,T)

$b-$ استنتج بنية (E^*,T).

$c-$ بين أن $(E,+,T)$ جسم تبادلي.

$d-$ حل في E المعادلة $\underbrace{f_{(a,b)}Tf_{(a,b)}T....Tf_{(a,b)}}_{\text{n مرة}} = f_2$

Exercice:4 **التمرين:4**

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 3 .

نذكر أن $(\mathrm{M}_3(IR),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ وأن $(\mathrm{M}_3(,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

لتكن E مجموعة المصفوفات $M(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&a+c&b\\c&b&a\end{pmatrix}$ حيث a و b و c أعداد حقيقية

ونعتبر المصفوفتين $J=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ و $K=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

1) بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

2) بين أن (I,J,K) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,\cdot)$

3) أ – تحقق أن $J^2=I+K$ وأن $K^2=I$ وأن $JK=KJ=J$

ب – استنتج أن E جزء مستقر من $(\mathrm{M}_3(IR),\times)$

ج – بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية

4) هل $(E,+,\times)$ جسم ؟ (يمكنك استعمال 3) أ –)

5) نضع $X=\frac{1}{\sqrt{2}}J$

أ – بين أن $X^2=\frac{1}{2}(I+K)$ ثم أن $X^3=X$

ب – استنتج أن لكل n من IN^* $X^{2n-1}=X$