# Trigonométrie (2)

**Lignes trigonométriques**

Pour tout réel $x$, on a :

- $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$
- $\cos(x)\in[-1\,;\,1]$
- $\sin(x)\in[-1\,;\,1]$
- $\cos(x+\pi)=-\cos(x)$
  $\sin(x+\pi)=-\sin(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$
  $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$
- $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$
  $\sin(\pi-x)=\sin(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)$
  $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)$

## Méthodes (1)

On donne $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Déterminer les valeurs exactes de :

- $\sin\frac{2\pi}{5}$ :

  $\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)=1-\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)=1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}$.

  Or $\frac{2\pi}{5}\in[0\,;\,\pi]$ donc $\sin\frac{2\pi}{5}\geqslant 0$ soit finalement $\sin\frac{2\pi}{5}=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

- $\cos\frac{3\pi}{5}$ :

  On remarque que $\pi-\frac{2\pi}{5}=\frac{5\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}=\frac{3\pi}{5}$ donc :

  $\cos\frac{3\pi}{5}=\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

- $\sin\frac{\pi}{10}$ :

  On remarque que $\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}=\frac{5\pi}{10}-\frac{4\pi}{10}=\frac{\pi}{10}=$ donc :

  $\sin\frac{\pi}{10}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

▷ **Exercice 1.** En vous inspirant des méthodes exposées, calculer $\sin\frac{3\pi}{5}$ et $\cos\frac{\pi}{10}$.

▷ **Exercice 2.** On donne $\sin\left(\frac{7\pi}{10}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1. Donner la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right)$
2. En déduire la valeur exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{17\pi}{10}\right)$

▷ **Exercice 3.** On donne $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

1. Démontrer que $\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
2. En déduire la valeur exactes de $\cos\left(-\frac{7\pi}{16}\right)$ et $\sin\left(\frac{17\pi}{16}\right)$

▷ **Exercice 4.** Simplifier les expressions suivantes :

$A = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$B = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(-x)$

$C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$D = \sin(\pi + x) + \cos(\pi + x) - \sin(-x)$

$E = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(-x)$

▷ **Exercice 6.** Simplifier les expressions suivantes :

**1.** $A = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi - x)$.

**2.** $B = \cos(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos(\pi + x)$

**3.** $C = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x + \pi) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi - x)$

**4.** $D = \sin^2 x + 2\cos^2 x - 1$

**5.** $E = \sin^2 x - \cos^2 x$

**6.** $F = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$

▷ **Exercice 5.** Calculer, sans utiliser la calculatrice :

$A = \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{4}$

$B = \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} - \cos\frac{5\pi}{3}$

$C = \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{7\pi}{6} + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$D = \sin\frac{\pi}{2} - \cos\pi + \sin\frac{3\pi}{2}$

$E = \cos\frac{7\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}$

$F = \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$