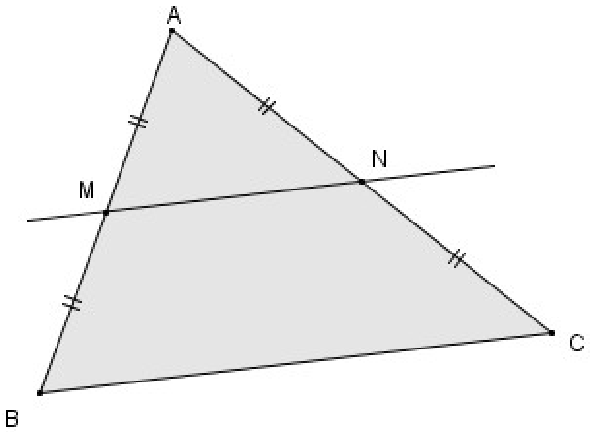
Chapitre 4 – Triangles et parallèles
- Cours -

I. Théorèmes des milieux

On considère la figure suivante :



On trace un triangle ABC
M est le milieu de [AB]
et N est le milieu de [AC]

Le théorème suivant nous permet alors d'affirmer que **la droite (MN) est parallèle au côté [BC]**.

Théorème 1 : Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté de ce triangle.

De même, si on mesure MN et BC, on peut remarquer que **MN =** $\frac{BC}{2}$

Théorème 2 : Si un segment joint les milieux de deux côtés d'un triangle alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.

On a enfin le dernier théorème.

Théorème 3 : Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un second côté alors elle coupe le troisième en son milieu.

Exemple 1 : On considère le triangle ABC et I et J les milieux respectifs de [AB] et [BC].
Montre que (IJ) est parallèle à (AC).

Données : Dans le triangle ABC, I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [BC]
Théorème : Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté de ce triangle.
Conclusion : (IJ) est parallèle à (AC)

Exemple 2 : On considère le triangle MNO tel que MN = 7,5 cmn MO = 6 cm et NO = 7 cm.
Soit R milieu de [MN] et S milieu de [NO]. Calcule RS.

Données : Dans le triangle MNO tel que MO = 6 cm,
R milieu de [MN] et S milieu de [NO]
Théorème : Si un segment joint les milieux de deux côtés d'un triangle alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.
Conclusion : RS = $\frac{MO}{2} = \frac{6}{2}$ = 3 cm

Exemple 3 : On considère le triangle DEF et H le milieu de [DE].
Soit (d) la parallèle à [DF] passant par H, elle coupe [EF] en G.
Montre que G est le milieu de [EF].

Données : Dans le triangle DEF, H est le milieu de [DE] et (d) est parallèle à (DF)
Théorème : Si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu.
Conclusion : G est le milieu de [EF]

Pour la rédaction, on peut résumer les **données** et **conclusions** de ces théorèmes par le tableau suivant.

	Données	**Conclusions**
Théorème 1	deux milieux	des parallèles
Théorème 2	deux milieux une longueur	une longueur
Théorème 3	un milieu une parallèle	un milieu

Ne pas oublier de préciser **dans quel triangle** on applique les théorèmes.

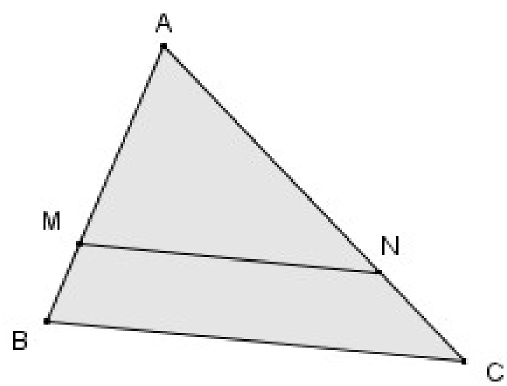
II. Théorèmes de Thalès

1. Le théorème

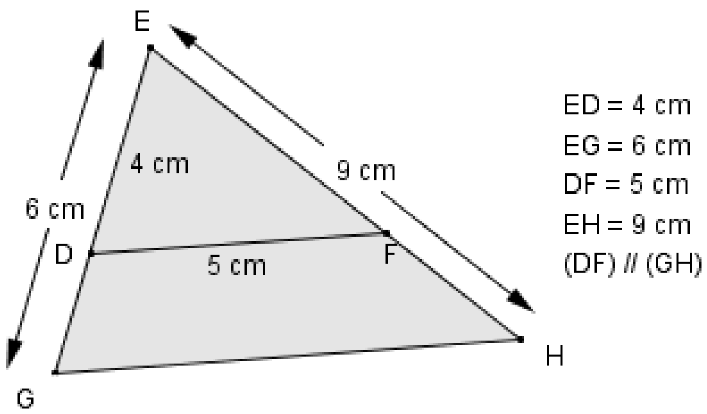
Théorème de Thalès :
Dans le triangle ABC, si on a :
- M appartient au côté [AB]
- N appartient au côté [AC]
- (MN) est parallèle à (BC)

Alors les longueurs des côtés des triangles AMN et ABC sont proportionnelles.

On a alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$



Exemple : On considère le triangle suivant. Calcule GH et EF.



Dans le triangle EGH, D × [GE], F × [EH] et (DF) // (GH)
D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{ED}{EG} = \frac{EF}{EH} = \frac{DF}{GH}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{EF}{9} = \frac{5}{GH}$$

On peut donc calculer EF :

$$\frac{4}{6} = \frac{EF}{9}$$

Donc EF = $\frac{4 \times 9}{6} = \frac{36}{6}$ = 6 cm

Et calculer GH :

$$\frac{4}{6} = \frac{5}{GH}$$

Donc GH = $\frac{5 \times 6}{4} = \frac{30}{4}$ = 7,5 cm

2. Agrandissements & réductions

Dans le théorème de Thalès, le triangle ABC est donc un **agrandissement** du triangle AMN et inversement, le triangle AMN est une **réduction** du triangle ABC.

La formule du théorème de Thalès nous donne le **rapport de réduction** qui est donc égal à

$$\frac{AM}{AB} \text{ ou } \frac{AN}{AC} \text{ ou encore } \frac{MN}{BC}.$$

De façon plus générale, le rapport de réduction ou d'agrandissement entre deux figures est donné par la fraction :

$$\frac{\textbf{longueur de la figure d'arrivée}}{\textbf{longueur correspondante dans la figure de départ}}$$

Remarques :

1) Un rapport d'agrandissement est toujours **supérieur** à 1 tandis qu'un rapport de réduction est toujours **inférieur** à 1.
2) Les mesures des angles **ne changent jamais** lors d'un agrandissement ou d'une réduction.
3) Si la figure A est un agrandissement de la figure B alors B est une réduction de A et les rapports sont **inverses** l'un par rapport à l'autre.

Chapitre 4 – Triangles et parallèles

- Fiche I : Théorèmes des milieux (découverte) -

Dans cette première fiche, on va découvrir les trois premiers théorèmes de ce chapitre, intitulés **théorèmes des milieux**.

I. Premier théorème

Instructions : Trace un triangle ABC
Place M et N les milieux respectifs de [AB] et [AC]
Trace la droite (MN)

En observant la figure et en déplaçant les sommets, complète le ***premier théorème*** :

Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est ……………………… au troisième côté de ce triangle.

II. Second théorème

Instructions : Efface la droite (MN) en conservant les points M et N
Trace le segment [MN]
Puis fais apparaître les longueurs MN et BC

En observant la figure et en déplaçant les sommets, complète le ***second théorème*** :

Si un segment joint les milieux de deux côtés d'un triangle alors sa ……………………………… est égale à ………………………………de celle du troisième côté.

III. Troisième théorème

Instructions : Efface ta figure précédente
Trace un triangle ABC
Place M, le milieu de [AB]
Trace la parallèle à [BC] passant par M, elle coupe [AC] en N

En observant la figure, le théorème 1 et en déplaçant les sommets, complète le ***troisième théorème*** :

Si une droite passe par le milieu d'un côté et est …………………… à un second côté alors elle …………………………………………………………………………

Chapitre 4 – Triangles et parallèles

- Fiche II : Théorèmes des milieux (rédaction) -

Méthode de rédaction :

1) faire une **figure** s'il n'y en a pas
2) identifer le **théorème** et l'écrire
3) poursuivre avec la **conclusion** (c'est la réponse à la question) puis finir avec les **données**

Exercice 1 :
On considère le triangle ABC tel que
AB = 7,5 cmn AC = 6 cm et BC = 7 cm.
Soit I milieu de [AB] et J milieu de [BC]. Calcule IJ.

Données : ……………………………………..
…………………………………………………
…………………………………………………

Théorème : …………………………………...
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………

Conclusion : …………………………………

Exercice 2 :
On considère le triangle DEF et H milieu de [DE].
Soit (d) la parallèle à [DF] passant par H, elle coupe [EF] en G.
Montre que G est le milieu de [EF].

Données : ……………………………………..
…………………………………………………
…………………………………………………

Théorème : …………………………………...
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………

Conclusion : …………………………………

Exercice 3 :
On considère le triangle MNO puis P et Q les milieux respectifs de [MN] et [NO].
Montre que (PQ) est parallèle à (MO).

Données : ……………………………………..
…………………………………………………
…………………………………………………

Théorème : …………………………………...
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………

Conclusion : …………………………………

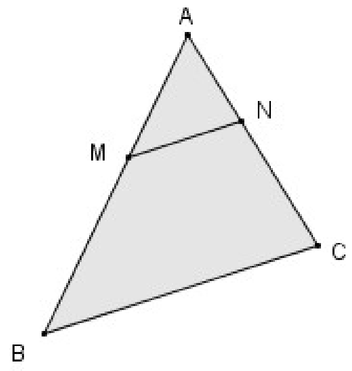
Chapitre 4 – Triangles et parallèles
- Fiche III : Théorèmes de Thalès (découverte) -

On considère la figure ci-contre.

Les deux triangles …… et …… semblent avoir la même ………………

Ainsi, chaque côté du **petit** triangle correspond à un côté du **grand** triangle.

le côté [AM] correspond au côté ……
le côté [AN] correspond au côté ……
le côté [MN] correspond au côté ……



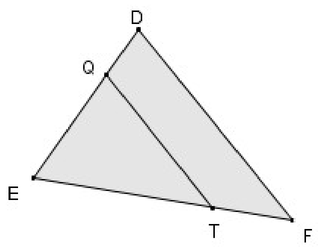
On peut représenter ceci par un tableau :

Côtés petit triangle	[AM]	[AN]	[MN]
Côtés grand triangle			

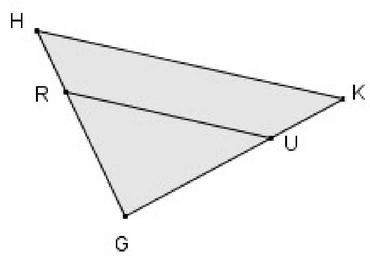
On obtient alors la **formule** suivante :

$$\frac{......}{......} = \frac{......}{......} = \frac{......}{......}$$

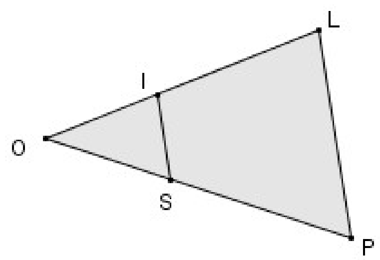
Exercice : Pour chaque figure, complète la formule.



$$\frac{......}{......} = \frac{......}{......} = \frac{......}{......}$$



$$\frac{......}{......} = \frac{......}{......} = \frac{......}{......}$$



$$\frac{......}{......} = \frac{......}{......} = \frac{......}{......}$$

Lorsque deux fractions sont égales et que l'un des nombres est inconnu, on peut utiliser la formule du **produit en croix**.

Exemple : $\frac{6}{9} = \frac{x}{15}$ on a alors x = $\frac{...... \times ......}{......} = \frac{...... \times ...... \times ...... \times ......}{...... \times ......}$ = ...

Exercice : Dans chaque cas, calcule la valeur de x.

$\frac{2}{3} = \frac{x}{21}$

alors x = $\frac{...... \times ......}{......}$

x = $\frac{...... \times ...... \times ......}{......}$

donc x = ……

$\frac{6}{x} = \frac{10}{15}$

alors x =

x =

donc x =

$\frac{x}{6} = \frac{7}{21}$

$\frac{9}{12} = \frac{15}{x}$

Chapitre 4 – Triangles et parallèles

- Fiche IV : Théorèmes de Thalès (rédaction) -

Le théorème de Thalès s'énonce de la façon suivante :

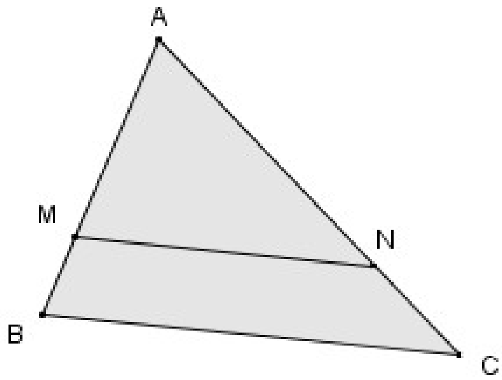
Théorème de Thalès :

Dans le triangle ABC, si on a :

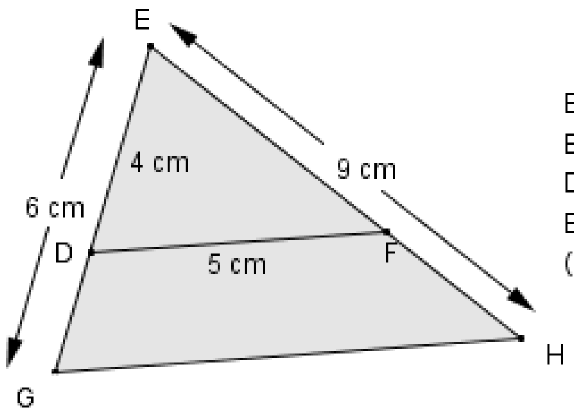
- M appartient au côté [AB]
- N appartient au côté [AC]
- (MN) est parallèle à (BC)

Alors les longueurs des côtés des triangles AMN et ABC sont proportionnelles.

On a alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$



Exemple : On considère le triangle suivant. Calcule GH et EF.

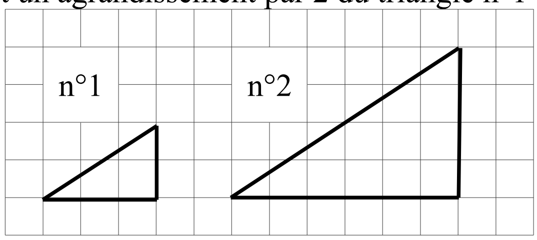


ED = 4 cm
EG = 6 cm
DF = 5 cm
EH = 9 cm
(DF) // (GH)

Chapitre 4 – Triangles et parallèles
- Fiche V : Agrandissement / réduction -

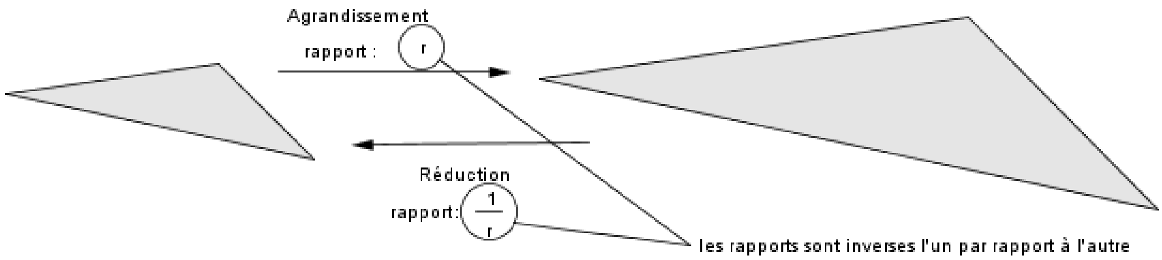
Lorsqu'on agrandit une figure, on multiplie toutes ses mesures par **un même nombre** appelé **rapport d'agrandissement**.

Exemple : Le triangle n°2 est un agrandissement par 2 du triangle n°1



A l'inverse le triangle n°1 est une **réduction** du triangle n°2. On a **divisé** toutes les mesures par **2**, ce qui équivaut à les **multiplier par** $\frac{1}{2}$ (l'inverse de 2).

De façon générale, on a le schéma suivant :



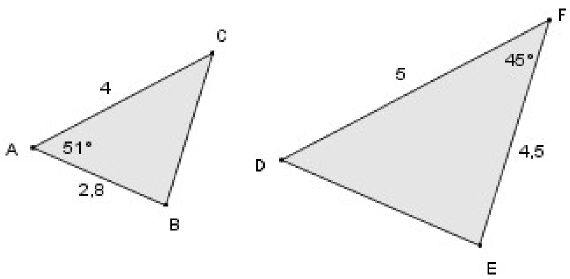
Remarques :

1) Un rapport d'agrandissement est toujours **supérieur** à 1 tandis qu'un rapport de réduction est toujours **inférieur** à 1.

2) Les mesures des angles **ne changent jamais** lors d'un agrandissement ou d'une réduction.

Astuce : Le **théorème de Thalès** correspond à une situation d'agrandissement/réduction et la formule nous donne même le **rapport de réduction**. On va donc l'utiliser pour trouver les rapports et calculer les mesures manquantes.

Exercice : On considère la figure suivante où DEF est un agrandissement de ABC.
Trouve le rapport d'agrandissement et les six mesures manquantes.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....