

Module Physique 1
TD de Thermodynamique
Corrigé de la série N°4

Exercice 1:

1)* Le système gaz parfait subit ici une transformation adiabatique réversible entre l'état initial $\left(P_0, V_0 = \frac{m}{\rho_0}, T_0\right)$ et l'état final (P, V, T) . La loi de Laplace s'applique à cette

transformation, donc $PV^\gamma = P_0V_0^\gamma$, d'où l'on tire: $V = V_0 \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$. Avec $\gamma = \frac{7}{5}$ et $V_0 = \frac{m}{\rho_0}$, il

vient alors:
$$V = \frac{m}{\rho_0} \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{5}{7}}$$

* La densité du gaz à l'état final est: $\rho = \frac{m}{V}$. En utilisant l'expression précédente du

volume, il vient:
$$\rho = \rho_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{7}{5}}$$

* Pour le calcul de la température à l'état final, on utilise la loi de Laplace sous sa forme en fonction des variables thermodynamiques (T, P) , soit: $T^\gamma P^{1-\gamma} = T_0^\gamma P_0^{1-\gamma}$. D'où

$T = T_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$. Tenant compte de $\gamma = \frac{7}{5}$, l'expression de la température finale devient:

$$T = T_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{2}{7}}$$

2) * La transformation est adiabatique, donc la quantité de chaleur échangée est nulle: $Q = 0$.

* Le travail échangé durant la transformation s'exprime par: $W = \frac{1}{\gamma-1}(PV - P_0V_0)$. En utilisant $\gamma = \frac{7}{5}$ et les expressions établies dans la première question pour les volumes

V et V_0 , il vient: $W = \frac{5}{2} \left(P \frac{m}{\rho_0} \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{5}{7}} - P_0 \frac{m}{\rho_0} \right)$, soit:
$$W = \frac{5mP_0}{2\rho_0} \left(\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{2}{7}} - 1 \right)$$

3) * La variation de l'énergie interne durant la transformation $(P_0, V_0, T_0) \rightarrow (P, V, T)$

est : $\Delta U = W + Q = W$. D'où
$$\Delta U = \frac{5mP_0}{2\rho_0} \left(\left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{2}{7}} - 1 \right)$$

* La variation de l'enthalpie durant la transformation $(P_0, V_0, T_0) \rightarrow (P, V, T)$ est : $\Delta H = \Delta U + \Delta(PV)$. Or $\Delta(PV) = PV - P_0V_0 = (\gamma - 1)W$. D'où $\Delta H = W + (\gamma - 1)W = \gamma W$. Avec

$\gamma = \frac{7}{5}$, on obtient finalement
$$\Delta H = \frac{7mP_0}{2\rho_0} \left(\left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{2}{7}} - 1 \right)$$

* La transformation est réversible, donc $dS = \frac{\delta Q}{T}$. Mais la transformation est adiabatique, donc $\delta Q = 0$. D'où $dS = 0$ et par intégration $\Delta S = 0$.

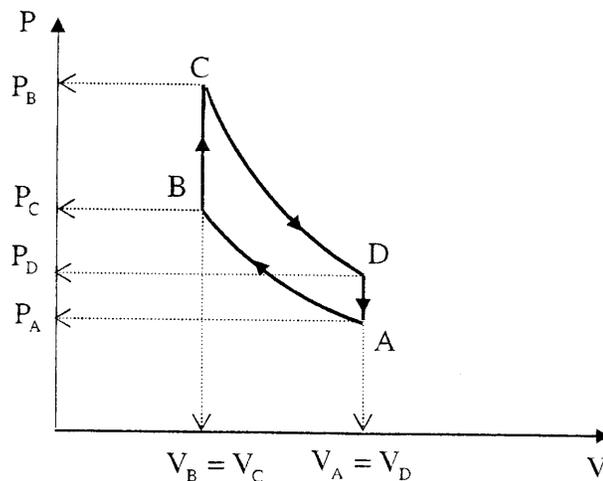
Exercice 2:

On supposera que le gaz est parfait et que les transformations adiabatiques sont ici quasi-statiques.

Le cycle comprend les transformations suivantes :

- $(P_A, V_A, T_A) \rightarrow (P_B, V_B, T_B)$: compression adiabatique ;
- $(P_B, V_B, T_B) \rightarrow (P_C, V_C, T_C)$: échauffement isochore ;
- $(P_C, V_C, T_C) \rightarrow (P_D, V_D, T_D)$: détente adiabatique ;
- $(P_D, V_D, T_D) \rightarrow (P_A, V_A, T_A)$: refroidissement isochore.

Le diagramme de Clapeyron décrivant ce cycle est le suivant :



Le cycle est moteur car il est décrit dans le sens des aiguilles d'une montre.

2) * Pression, température et volume au point A :

On a déjà P_A et T_A . Pour le calcul de V_A , on utilise l'équation d'état des gaz parfaits

sachant que le nombre de moles $n = 1$, soit $P_A V_A = RT_A$. D'où
$$V_A = R \frac{T_A}{P_A}$$

* Pression, température et volume au point B :

- La transformation $(P_A, V_A, T_A) \rightarrow (P_B, V_B, T_B)$ est une compression adiabatique quasi-statique, donc la loi de Laplace s'applique. D'où $P_B V_B^\gamma = P_A V_A^\gamma$. La pression est alors

donnée par $P_B = P_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^\gamma$, soit $P_B = P_A a^\gamma$.

- Le calcul de la température en B se fait en utilisant la loi de Laplace dans sa forme en fonction du couple des variables thermodynamiques (T,P). Celle-ci s'écrit :

$T_B^\gamma P_B^{1-\gamma} = T_A^\gamma P_A^{1-\gamma}$. D'où l'on tire: $T_B = T_A \left(\frac{P_A}{P_B} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$. Avec $P_B = P_A a^\gamma$, l'expression de la température en B devient : $T_B = T_A a^{\gamma-1}$.

- Le volume en B se calcule en utilisant l'équation d'état des gaz parfait : $P_B V_B = RT_B$. D'où $V_B = R \frac{T_B}{P_B}$, ce qui donne en remplaçant P_B par son expression établie ci-dessus

$$V_B = \frac{RT_A}{aP_A}$$

* Pression, température et volume au point C :

- La transformation $(P_B, V_B, T_B) \rightarrow (P_C, V_C, T_C)$ est un échauffement isochore. D'où

$$V_C = V_B. \text{ Ainsi } V_C = \frac{RT_A}{aP_A}$$

- La transformation $(P_B, V_B, T_B) \rightarrow (P_C, V_C, T_C)$ est isochore, donc la variation de l'énergie interne qui lui est associée est : $\Delta U = W + Q = 0 + Q_0 = Q_0$. Par ailleurs le gaz est parfait, donc il obéit à la première loi de Joule qui permet d'écrire $\Delta U = C_v(T_C - T_B) = \frac{R}{\gamma-1}(T_C - T_B)$. D'où $\frac{R}{\gamma-1}(T_C - T_B) = Q_0$ et $T_C = T_B + \frac{\gamma-1}{R}Q_0$, soit en

utilisant l'expression de T_B établie ci-dessus : $T_C = T_A a^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{R}Q_0$.

- Le calcul de la pression est fait en utilisant la loi des gaz parfaits : $P_C V_C = RT_C$, ce qui donne : $P_C = R \frac{T_C}{V_C}$. En utilisant les expressions de V_C et T_C établies

précédemment, il vient : $P_C = R \frac{T_A a^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{R}Q_0}{\frac{RT_A}{aP_A}}$, soit après simplification :

$$P_C = P_A \left(a^\gamma + \frac{(\gamma-1)Q_0}{RT_A} a \right)$$

* Pression, température et volume au point D :

- La transformation $(P_D, V_D, T_D) \rightarrow (P_A, V_A, T_A)$ est isochore. Donc $V_D = V_A$. Ce qui

$$\text{donne : } V_D = R \frac{T_A}{P_A}$$

- La transformation $(P_C, V_C, T_C) \rightarrow (P_D, V_D, T_D)$ est adiabatique quasi-statique. Donc la loi de Laplace s'applique : $P_D V_D^\gamma = P_C V_C^\gamma$. D'où $P_D = P_C \left(\frac{V_C}{V_D} \right)^\gamma$. Avec les expressions de V_C ,

V_D et P_C établies précédemment, il vient : $P_D = P_A \left(1 + \frac{(\gamma-1)Q_0}{RT_A} a^{1-\gamma} \right)$.

- Le calcul de la température en D se fait finalement en utilisant la loi des gaz parfaits : $P_D V_D = RT_D$. D'où $T_D = \frac{P_D V_D}{R}$. Cette expression se simplifie en utilisant les

expressions précédentes de P_D et V_D sous la forme: $T_D = T_A + \frac{(\gamma-1)Q_0}{R} a^{1-\gamma}$.

3) Par application du premier principe de la thermodynamique au cycle, il vient : $\Delta U = W + Q_{B \rightarrow C} + Q_{D \rightarrow A} = 0$. D'où $W = -Q_{B \rightarrow C} - Q_{D \rightarrow A}$. Puisque $Q_{B \rightarrow C} = Q_0$, il suffit de calculer $Q_{D \rightarrow A}$. Or on a : $Q_{D \rightarrow A} = C_V(T_A - T_D) = \frac{R}{\gamma-1}(T_A - T_D)$, soit $Q_{D \rightarrow A} = -Q_0 a^{1-\gamma}$. Le travail échangé durant le cycle est alors donné par : $W = -Q_0 + Q_0 a^{1-\gamma} = -Q_0(1 - a^{1-\gamma})$.

$W = -Q_0(1 - a^{1-\gamma})$. A.N. : $W = -14.1 \text{ kJ}$

4) Le rendement de ce moteur est défini par : $\eta = \frac{|W|}{Q_{B \rightarrow C}}$. D'où $\eta = \frac{|W|}{Q_{B \rightarrow C}} = \frac{Q_0(1 - a^{1-\gamma})}{Q_0}$.

$\eta = 1 - a^{1-\gamma}$. A.N. : $\eta = 56.5\%$

5) Remarquons que nous pouvons associer à ce cycle plusieurs cycles de Carnot. Comme ce qui intéresse l'utilisateur c'est le travail récupéré par rapport au coût énergétique dépensé, il faut donc que le coût soit le même dans les deux cas. Or ce que dépense l'utilisateur c'est la quantité de chaleur $Q_{B \rightarrow C} = Q_0$ entre les points B et C. On prendra donc le cycle de Carnot construit sur les températures T_B et T_C , pour lequel

le rendement de Carnot est : $\eta_C = 1 - \frac{T_B}{T_C}$.

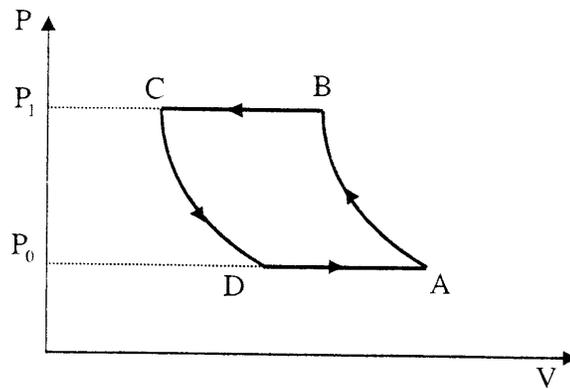
A.N. : $\eta_C = 63.5\%$. On vérifie bien que le cycle de Carnot admet un rendement meilleur que celui du moteur considéré ici.

Tableau récapitulatif des états du cycle :

	Pression P (Pa)	Température T (K)	Volume V (m ³)
A	10 ⁵	300	2.49 × 10 ⁻²
B	1.84 × 10 ⁶	690	3.12 × 10 ⁻³
C	5.04 × 10 ⁶	1892	3.12 × 10 ⁻³
D	2.74 × 10 ⁵	824	2.49 × 10 ⁻²

Exercice 3:

La machine frigorifique fonctionne selon le cycle indiqué sur la figure suivante. Il s'agit bien d'un cycle récepteur car on décrit le cycle dans le sens trigonométrique. Les transformations adiabatiques sont supposées quasi-statiques.



1) Le travail W_{ABC} est reçu par le système car le long de cette branche du cycle $dV < 0$ et donc $\delta W = -PdV > 0$. Le travail W_{CDA} est cédé par le système car durant cette branche $dV > 0$ et donc $\delta W = -PdV < 0$. Finalement $W_{ABC} > 0$ et $W_{CDA} < 0$. Comme le travail associé à une branche est donné en valeur absolue par l'aire de la surface définie par la branche considérée, il est évident puisque la branche ABC est toujours au-dessus de la branche CDA que $|W_{ABC}| > |W_{CDA}|$.

2) Le travail reçu par la machine frigorifique est positif car $W_{ABC} + W_{CDA} > 0$ (cycle décrit dans le sens trigonométrique).

La quantité de chaleur enlevée au réservoir froid correspond à l'échange de chaleur durant la branche isobare DA. Notons cette quantité de chaleur Q_{DA} . Puisque le gaz est assimilé à un gaz parfait pour lequel la chaleur spécifique massique à pression constante est indépendante de la température, on a : $Q_{DA} = mc_p(T_A - T_D)$. De la même façon la quantité de chaleur échangée avec la source chaude est : $Q_{BC} = mc_p(T_C - T_B)$. Remarquons que $Q_{DA} > 0$ car cette quantité de chaleur est extraite par le système à la source froide et $Q_{BC} < 0$ car dans ce deuxième cas la quantité de chaleur est fournie par le système à la source chaude.

Par application du premier principe de la thermodynamique au cycle, on a : $\Delta U = W + Q_{DA} + Q_{BC} = 0$, ce qui donne : $W = -Q_{DA} - Q_{BC}$. Il suffit d'exprimer maintenant Q_{BC} en fonction de Q_{DA} et des températures T_A et T_B . Pour cela exprimons les températures T_C et T_D en fonction de T_A et T_B .

La transformation $(P_A, V_A, T_A) \rightarrow (P_B, V_B, T_B)$ est adiabatique quasi-statique, donc

$$T_A^\gamma P_A^{1-\gamma} = T_B^\gamma P_B^{1-\gamma}, \text{ d'où } \frac{P_B}{P_A} = \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}.$$

La transformation $(P_C, V_C, T_C) \rightarrow (P_D, V_D, T_D)$ est adiabatique quasi-statique, donc

$$\frac{P_D}{P_C} = \left(\frac{T_C}{T_D} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

Les transformations $(P_B, V_B, T_B) \rightarrow (P_C, V_C, T_C)$ et $(P_D, V_D, T_D) \rightarrow (P_A, V_A, T_A)$ sont isobares donc $P_C = P_B$ et $P_D = P_A$. Ce qui permet de montrer que

$$\frac{P_D}{P_C} = \left(\frac{T_C}{T_D} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \frac{P_A}{P_B} = \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \text{ et par suite : } \frac{T_C}{T_D} = \frac{T_B}{T_A} = \frac{T_C - T_B}{T_D - T_A}$$

Cette dernière relation montre que $Q_{BC} = mc_p(T_C - T_B) = mc_p(T_D - T_A) \frac{T_B}{T_A} = Q_{DA} \frac{T_B}{T_A}$.

En substituant Q_{BC} dans l'expression du travail, il vient alors : $W = -Q_{DA} \left(1 - \frac{T_B}{T_A} \right)$.

3) Le coefficient de performance de cette machine frigorifique (dit aussi efficacité du réfrigérateur) est par définition: $e = \frac{Q_{DA}}{W}$. Ce qui donne : $e = \frac{T_A}{T_B - T_A}$.

4) La quantité de chaleur Q_{DA} est enlevée à la source froide. Elle sert à refroidir une masse d'eau m_{eau} de T_i à T_f . En négligeant les pertes, on doit donc vérifier la

condition suivante: $Q_{DA} = mc_p(T_A - T_D) = m_{\text{eau}} c_e(T_f - T_i)$. D'où $m = m_{\text{eau}} \frac{c_e(T_f - T_i)}{c_p(T_A - T_D)}$.

A.N. : $m = 261.6 \text{ kg}$.