Exercice 1

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Un mélange de graines de fleurs contient :
- – 50 graines de type A ;
- – 90 graines de type B ;
- – 60 graines de type C.

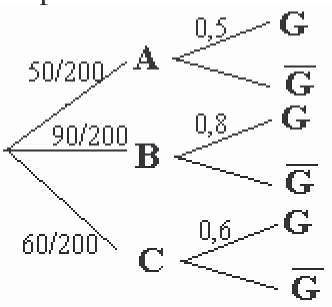
Toutes les graines n'ont pas le même pouvoir de germination. On conviendra qu'une graine germe correctement si celle-ci donne naissance à une plante qui fleurit.

On considère que la probabilité pour qu'une graine germe correctement est de :
- –0,5 pour une graine de type A ;
- –0,8 pour une graine de type B ;
- –0,6 pour une graine de type C.

On sème une graine prise au hasard dans le mélange.

Notons A l’événement « obtenir une graine de type A », B l’événement « obtenir une graine de type B », C l’événement « obtenir une graine de type C » et G l’événement « obtenir une graine qui germe ».

On peut traduire les données par l’arbre de probabilités suivant :



1) $p(A) = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$ donc la probabilité que ce soit une graine de type A est égale à $\frac{1}{4}$.

2) $p(A \cap G) = p(A) \times p_A(G) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

   Donc, la probabilité que ce soit une graine de type A et qu’elle germe correctement est égale à $\frac{1}{8}$.

3) D’après la formule des probabilités totales, $p(G) = p(A \cap G) + p(B \cap G) + p(C \cap G)$.

   Donc, $p(G) = \frac{1}{8} + \frac{90}{200} \times \frac{8}{10} + \frac{60}{200} \times \frac{6}{10} = \frac{133}{200}$.

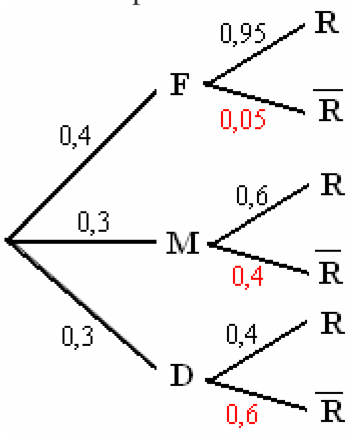
   D’où, la probabilité que la graine semée soit une graine qui germe correctement est égale à $\frac{133}{200}$.

4) $p(C \cap \overline{G}) = p(C) \times p_C(\overline{G}) = \frac{60}{200} \times \frac{4}{10} = \frac{3}{25}$.

   La probabilité que la graine semée soit une graine de type C qui ne germe pas correctement est égale à $\frac{3}{25}$.

Exercice 2

1) 40 % des grilles de sudoku sont de niveau facile donc, **$p(F) = 0,4$**.
30 % sont de niveau moyen donc, **$p(M) = 0,3$** et 30 % sont de niveau difficile donc **$p(D) = 0,3$**.
Pierre réussit les grilles de sudoku de niveau facile dans 95 % des cas, donc **$p_F(R) = 0,95$**.
Il réussit les grilles de sudoku de niveau moyen dans 60 % des cas, donc **$p_M(R) = 0,6$**.
Il réussit les grilles de sudoku de niveau difficile dans 40 % des cas, donc **$p_D(R) = 0,4$**.
On peut donc traduire les données par l'arbre de probabilités suivant :



Remarque : les probabilités indiquées en rouge ont été calculées avec la loi des nœuds (la somme des probabilités portées par les branches issues d'un même nœud est égale à 1).

2) **a.** On cherche à calculer $p(R \cap D)$.
Or, $p(R \cap D) = p(D) \times p_D(R) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$.
Donc, **la probabilité que la grille proposée soit difficile et que Pierre la réussisse est 0,12**.

b. On cherche à calculer $p(F \cap \overline{R})$.
Or, $p(F \cap \overline{R}) = p(F) \times p_F(\overline{R}) = 0,4 \times 0,05 = 0,02$.
Donc, **la probabilité que la grille proposée soit facile et que Pierre ne la réussisse pas est 0,02**.

c. On cherche à calculer $p(R)$. Or, les événements F, M et D forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, $p(R) = p(F \cap R) + p(M \cap R) + p(D \cap R)$.
D'où, $p(R) = 0,4 \times 0,95 + 0,3 \times 0,6 + 0,12 = 0,68$.
Donc, **la probabilité que Pierre réussisse la grille proposée est égale à 0,68**.

3) On cherche à calculer $p_{\overline{R}}(M)$.
Or, $p_{\overline{R}}(M) = \dfrac{p(\overline{R} \cap M)}{p(\overline{R})} = \dfrac{0,3 \times 0,4}{1 - 0,68} = 0,375$.
Donc, **sachant que Pierre n'a pas réussi la grille proposée, la probabilité que ce soit une grille de niveau moyen est 0,375**.

4) On a : $p_R(F) = \dfrac{p(R \cap F)}{p(R)} = \dfrac{0,4 \times 0,95}{0,68} \approx 0,56$.
Donc, la probabilité que la grille soit facile sachant que Pierre a réussi cette grille est 0,56 (valeur arrondie au centième).
Ainsi, **la petite sœur de Pierre a un peu plus d'une chance sur deux d'avoir raison**.

Exercice 3

Un commerçant vendant des produits biologiques propose quotidiennement des paniers légumes frais contenant 2 kg de légumes ou des paniers contenant 5 kg de légumes.
35 % des clients qui achètent ces paniers ont au moins un enfant.
Parmi ceux qui n'ont pas d'enfant, 40 % choisissent les paniers de 5 kg de légumes et les autres choisissent les paniers de 2 kg de légumes.

On interroge au hasard un client qui achète un panier de légumes.
On note : E l'événement « le client interrogé a au moins un enfant » ;
C l'événement « le client interrogé a choisi un panier de 5 kg de légumes ».

1) On cherche $p(\overline{E})$.
   Or, 35 % des clients qui achètent ces paniers ont au moins un enfant, donc, $p(E) = 0{,}35$.
   Ainsi, $p(\overline{E}) = 0{,}65$.
   Donc, **la probabilité que le client interrogé n'ait pas d'enfant est 0,65**.

2) On cherche $p_{\overline{E}}(C)$.
   Or, parmi les clients qui n'ont pas d'enfant, 40 % choisissent les paniers de 5 kg.
   Ainsi, $p_{\overline{E}}(C) = 0{,}4$.
   Donc, **sachant que le client interrogé n'a pas d'enfant, la probabilité qu'il ait choisi un panier contenant 5 kg de légumes est 0,4**.

3) $\overline{E} \cap C$ est l'événement « le client n'a pas d'enfant et a acheté un panier de 5 kg ».
   On a : $\mathbf{p(\overline{E} \cap C)} = p(\overline{E}) \times p_{\overline{E}}(C) = 0{,}65 \times 0{,}4$ **= 0,26**.

4) On sait de plus que 30 % des clients qui achètent des paniers choisissent des paniers de 5 kg.
   Donc, **p(C) = 0,3**.
   a. Les événements E et $\overline{E}$ formant une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, $p(C) = p(E \cap C) + p(\overline{E} \cap C)$.
      Ainsi, $p(E \cap C) = p(C) - p(\overline{E} \cap C) = 0{,}3 - 0{,}26$.
      Donc, $\mathbf{p(E \cap C) = 0{,}04}$.

   b. $p_E(C) = \dfrac{p(E \cap C)}{p(E)} = \dfrac{0{,}04}{0{,}35} = \dfrac{4}{35} = 0{,}114$ à 10^{-3} près.
      Donc, **la probabilité conditionnelle de C sachant que E est réalisé est 0,114 au millième près**.

Exercice 4

Jean s'amuse régulièrement sur un terrain de football avec le gardien de but. Chaque partie consiste à tirer successivement deux tirs au but.

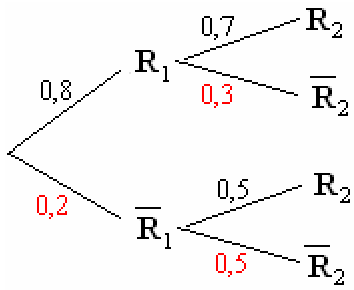
Au vu des résultats obtenus au cours de l'année, on admet que :

- la probabilité que Jean réussisse le premier tir au but est égal à 0,8 ;
- s'il réussit le premier, alors la probabilité de réussir le second est 0,7 ;
- s'il manque le premier, alors la probabilité de réussir le second est 0,5.

On note R_1 l'événement : « le premier tir au but est réussi » et $\overline{R_1}$ son événement contraire.

R_2 l'événement : « le second tir au but est réussi » et $\overline{R_2}$ son événement contraire.

1) On obtient l'arbre pondéré ci-contre.
Remarque : les probabilités inscrites en rouge ont été obtenues grâce à la loi des nœuds.



2) $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R1}(R_2) = 0,8 \times 0,7 = 0,56$
Donc, la probabilité que les deux tirs au but soient réussis est 0,56.

3) a. Les événements R_1 et $\overline{R_1}$ formant une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a : $P(R_2) = P(R_2 \cap R_1) + P(R_2 \cap \overline{R_1})$
Ainsi, $P(R_2) = 0,5\times0,2 + 0,56 = 0,66$
Donc, la probabilité que le second tir au but soit réussi est égale à 0,66.

b. On a : $P(R_1) = 0,8$ et $P(R_2) = 0,66$ d'où : $P(R_1)\times P(R_2) = 0,8\times0,66 = 0,528$.
Par ailleurs, $P(R_1 \cap R_2) = 0,56$.
Comme $P(R_1 \cap R_2) \neq P(R_1)\times P(R_2)$, les événements R_1 et R_2 ne sont pas indépendants

4) On note A l'événement : « Jean a réussi exactement un tir au but ».
On a : $P(A) = P(\overline{R_1} \cap R_2) + P(R_1 \cap \overline{R_1}) = 0,2\times0,5 + 0,8\times0,3 = 0,34$