Correction Brevet des Collèges Pondichéry – Avril 2013

Exercice 1 : Questions diverses

> **Rappel :**
> Un nombre entier est un nombre sans virgule

Affirmation 1 : Ce nombre est-il entier ?

Le nombre donné est une identité remarquable de type 3, avec $a = \sqrt{5}$ et $b = 1$. On a donc :
$(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1) = \sqrt{5}^2 - 1^2 = 5 - 1 = 4.$
Ce nombre est entier. **L'affirmation 1 est vraie.**

> **Rappel: Egalités remarquables**
>
> $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
> $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
> $\boldsymbol{(a - b)(a + b) = a^2 - b^2}$

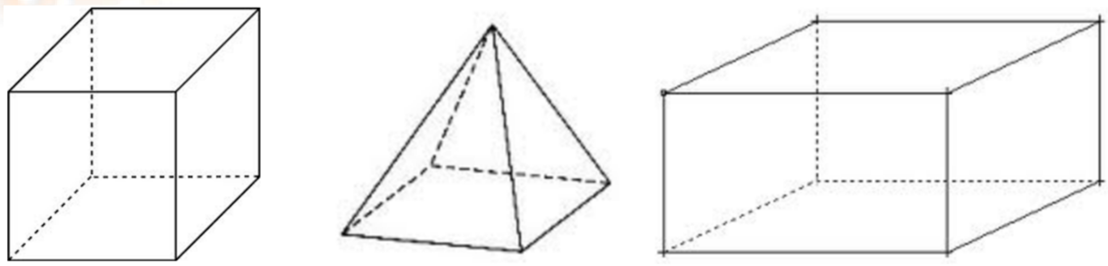
Affirmation 2 : Quels sont les diviseurs de 4?

> **Rappel : Diviseurs :**
> On dit qu'un nombre b est un diviseur d'un nombre a si $b \leq a$ et si le quotient $\frac{a}{b}$ est un nombre entier

Testons plusieurs nombres possibles :
Avec 1 : $\frac{4}{1} = 4 \rightarrow Entier$. 1 est un diviseur de 4.
Avec 2 : $\frac{4}{2} = 2 \rightarrow Entier$. 2 est un diviseur de 4.
Avec 3 : $\frac{4}{3} \rightarrow Pas\ entier$. 3 n'est pas un diviseur de 4.
Avec 4 : $\frac{4}{4} = 1 \rightarrow Entier$. 4 est un diviseur de 4.
Parmi tous les entiers plus petits que 4 il y a 3 diviseurs de 4 (et pas 2). **L'affirmation 2 est fausse.**

Affirmation 3 : Nombre de faces d'un cube, d'une pyramide à base carrée et d'un pavé droit ?

On commence par dessiner chaque forme donnée dans l'affirmation.



Un carré a 6 faces, une pyramide à base carrée a 5 faces et un pavé droit a 6 faces. On fait la somme des faces de chaque forme. On a : $Somme = 6 + 5 + 6 = 17$ faces. **L'affirmation 3 est vraie.**

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Rappel sur le choix de la propriété :
Le théorème de Thalès sert à calculer des longueurs.
La réciproque de Thalès prouve que deux droites sont parallèles
La contraposée de Thalès prouve que deux droites ne sont pas pas parallèles

Attention rédaction:
On sait que / Or / Donc

On sait que $OA = 2{,}8cm$, $OB = 2cm$, $OC = 5cm$, $OD = 3{,}5cm$
et que les points A, O et C d'une part et que B, O et D d'autre part sont alignés dans cet ordre.
Or, **si** les droites (AB) et (CD) sont parallèles, alors $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$.

Calculons séparément. **D'une part**, on a :

$$\frac{OA}{OC} = \frac{2{,}8}{5} = 0{,}56$$

D'autre part, on a :

$$\frac{OB}{OD} = \frac{2}{3{,}5} \approx 0{,}57 \neq 0{,}56$$

Ici, on constate que $\boldsymbol{\frac{OA}{OC} \neq \frac{OB}{OD}}$.
Donc, d'après la contraposée de Thalès on déduit que les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.
L'affirmation 4 est fausse.

Exercice 2 : Statistiques

Voici le tableau qui donne les tailles des plantules de maïs des 29 élèves de la classe :

Taille en cm	0	8	12	14	16	17	18	19	20	21	22
Effectif	1	2	2	4	2	2	3	3	4	4	2

1/ Combien de plantules ont une taille qui mesure au plus 12 cm ?

Les plantules qui ont une taille inférieure ou égale à 12 cm sont le plantule de 0 cm, les deux de 8 cm et les deux de 12 cm, soient 5 plantules.
On compte donc 5 plantules avec une taille d'au plus 12 cm.

Attention : Compréhension de texte
Ici, l'énoncé n'est pas clair. On peu choisir les plantules d'une taille inférieure ou strictement inférieure à 12 cm. Je choisis une taille strictement inférieure à 12 cm.

2/ Etendue de la série :

Rappel : Etendue
$Etendue = Maxi\ de\ la\ série - Mini\ de\ la\ série$
et pas l'effectif maximum – l'effectif minimum !

L'étendue est la différence entre le maximum de la série ($22\ cm$) et le minimum de la série ($0\ cm$).
On a donc : $Etendue = 22 - 0 = 22$.
L'étendue de cette série est donc de 22 cm.

Rappel : Moyenne pondérée (valeurs dans un tableau)
Pour calculer la moyenne pondérée, on multiplie chaque valeur par l'effectif lui correspondant, on fait la somme entre les produits et on divise le tout par l'effectif total (somme de tous les effectifs)

3/ Calculons la taille moyenne des plantules :

$$moyenne = \frac{0\times1+8\times2+12\times2+14\times4+16\times2+17\times2+18\times3+19\times3+20\times4+21\times4+22\times2}{1+2+2+4+2+2+3+3+4+4+2} = \frac{481}{29} \approx 16{,}6cm$$

La moyenne est de $16{,}6$ cm, arrondi au dixième.

Attention : Arrondi: Ici, l'énoncé demande d'arrondir au dixième (1 chiffre après la virgule)

4/ Déterminons la médiane de cette série :

Rappel : Médiane : Pour trouver la médiane d'une série, on suit 2 étapes :

1/ On classe toutes la valeurs dans l'ordre croissant

2/ On calcule la **position** (et pas la valeur) de la médiane : $Position = \frac{Effectif\ total}{2}$.

Deux cas se présentent alors :

→ La position est un nombre entier (sans virgule), alors la médiane se situe entre cette position et la position suivante (si $Position = 5$, la médiane est entre la 5ème et la 6ème valeur dans la liste classée et la médiane vaut $Médiane = \frac{Valeur\ position\ 5 + Valeur\ position\ 6}{2}$)

→ La position n'est pas un nombre entier (avec virgule), alors la médiane se situe à la position entière supérieure à la valeur donnée (si $Position = 7{,}5$, la médiane est la 8ème valeur dans la liste classée)

On classe dans l'ordre croissant les valeurs de la série :

$\underbrace{0 ;8 ;8 ;12 ;12 ;14 ;14 ;14 ;14 ;16 ;16 ;17 ;17 ;18}_{14\ valeurs} ;18 ;\underbrace{18 ;19 ;19 ;19 ;20 ;20 ;20 ;20 ;21 ;21 ;21 ;21 ;22 ;22}_{14\ valeurs}$

Dans cette liste ordonnée, la médiane se trouve à la $Position = \frac{Effectif\ total}{2} = \frac{29}{2} = 14{,}5$, c'est-à-dire à la 15ème position. La quinzième position de cette liste est repérée en rouge.

On en conclue que la médiane de cette série est de 18 centimètres, ce qui signifie qu'autant de plantules ont une taille supérieure qu'inférieure à 18 cm.

5/Quel pourcentage d'élèves a bien respecté le protocole ?

Par contre, ici, l'énoncé est très clair !!!

Parmi les 29 plantules, 24 une taille supérieure ou égale à 14 centimètres.

Le pourcentage d'élèves ayant respecté le protocole est donc de $Pourcentage = \frac{24}{29} \times 100 \approx 82{,}76\%$.

On en déduit que $82{,}8\%$ des élèves ont respecté le protocole.

Unités: Ici, aucun arrondi n'est demandé. Dans ce cas, je conseille d'arrondir 2 chiffres après la virgule

6/ Prouvons qu'avec l'échantillon du professeur la médiane ne changera pas

Discussion: Ici, l'objectif est de convaincre le correcteur. Il s'agit de faire comprendre qu'on connaît le chapitre. C'est la qualité de rédaction qui est importante ici !

Ici, on peut distinguer deux cas :

- Soit le professeur obtient une plantule d'une taille supérieure à la médiane des plantules des élèves, alors la liste ordonnée devient (en nommant « x » la taille de la plantule du professeur) :

0 ;8 ;8 ;12 ;12 ;14 ;14 ;14 ;14 ;16 ;16 ;17 ;17 ;18 ;18 ;18 ;19 ;19 ;19 ;20 ;20 ;20 ;20 ;21 ;21 ;21 ;21 ;22 ;22 ;x

- Soit le professeur obtient une plantule d'une taille inférieure à la médiane des plantules des élèves, alors la liste ordonnée devient (en nommant « x » la taille de la plantule du professeur) :

x ;0 ;8 ;8 ;12 ;12 ;14 ;14 ;14 ;14 ;16 ;16 ;17 ;17 ;18 ;18 ;18 ;19 ;19 ;19 ;20 ;20 ;20 ;20 ;21 ;21 ;21 ;21 ;22 ;22

Trouvons ensuite la position de la médiane dans ces deux listes. L'effectif total passe de 29 à 30 (29 élèves auquel on ajoute le professeur). $On\ a\ Position = \frac{Effectif\ total}{2} = \frac{29+1}{2} = \frac{30}{2} = 15$.

La médiane se situe donc entre la 15ème et la 16ème valeur (repérées en rouge dans chacune des listes).

On en déduit que la médiane est la même dans les deux cas : $Médiane = \frac{18+18}{2} = \frac{36}{2} = 18$.

On en déduit que quel que soit la taille de la plantule du professeur la médiane ne changera pas.

Exercice 3 : Sur la Lune

1/ Calculons le poids de cet homme sur Terre :

En utilisant la relation donnée, on a
$P = m \times g_T = 70 \times 9{,}8 = 686N$.
Sur Terre, cet homme pèse donc 686N.

Attention: Le poids s'exprime en NEWTON, alors que la masse s'exprime en grammes (ou kilogrammes).

On n'a donc qu'une masse (par exemple 70 kg), mais notre poids dépend de l'astre sur lequel on est (en général la Terre). Ainsi, le poids d'une personne de 70kg est de 686N sur Terre tandis qu'il est de $70 \times 1{,}7 = 119N$ sur la Lune !

2/a/ Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ?

Pour le savoir, on calcule le rapport entre la ligne des poids et la ligne des masses. On trouve alors :

$$\frac{5{,}1}{3} = 1{,}7 \qquad \frac{17}{10} = 1{,}7 \qquad \frac{42{,}5}{25} = 1{,}7 \qquad \frac{68}{40} = 1{,}7 \qquad \frac{93{,}5}{55} = 1{,}7$$

On constate que tous ces rapports sont égaux. Ce tableau est donc un tableau de proportionnalité.

2/b/ Calculons l'accélération de la pesanteur g_L :

On sait que sur la Lune, la relation $P = m \times g$ est toujours valable, donc $\frac{P}{m} = g_L$.
Or, on vient de calculer le rapport $\frac{P}{m}$ de toutes les colonnes du tableau. On en déduit que l'accélération de la pesanteur sur la Lune est $g_L = 1{,}7$.

Attention: L'expression $P = m \times g$ marche sur tous les astres. La seule chose qui change d'un astre à l'autre, c'est la valeur de l'accélération de la pesanteur. Sur Terre, elle vaut $g_T = 9{,}8$, alors que sur la Lune elle vaut $g_L = 1{,}7$.

2/c/ Est-il vrai qu'on pèse environ 6 fois moins lourd sur la Lune que sur la Terre ?

Il suffit de calculer le rapport suivant : $\frac{Poids\ sur\ la\ Terre}{Poids\ sur\ la\ Lune} = \frac{\cancel{m}\times g_T}{\cancel{m}\times g_L} = \frac{g_T}{g_L} = \frac{9{,}8}{1{,}7} \approx 5{,}76 \approx 6$.
On en déduit que $\frac{Poids\ sur\ la\ Terre}{Poids\ sur\ la\ Lune} \approx 6$, donc que $Poids\ sur\ la\ Terre \approx 6 \times Poids\ sur\ la\ Lune$.
Il est donc bien vrai que l'on pèse environ 6 fois plus lourd sur Terre que sur la Lune.

3/ a/Calculons la profondeur BD du cratère de Lune :

On sait que le triangle BCD est rectangle en D. L'hypoténuse est donc le segment $[BC]$. On connaît la mesure de l'angle $\widehat{DCB} = 4{,}3°$ et la longueur $CD = 29km$.
En résumé, on connait l'angle $\widehat{DCB}$, la longueur du côté **adjacent** à cet angle et on cherche la longueur du côté **opposé**.
Il faut donc utiliser la tangente !

Rappel : Trigonométrie
Il est **interdit** d'utiliser la trigonométrie si on ne dit pas que le **triangle est rectangle**

Rappel : CAH SOH TOA
Cosinus = Adjacent / Hypoténuse
Sinus = Opposé / Hypoténuse
Tangente = Opposé / Adjacent

On a donc $\tan(\widehat{DCB}) = \frac{Côté\ opposé}{Côté\ adjacent} = \frac{BD}{CD}$.
Donc $BD = CD \times \tan(\widehat{DCB}) = 29 \times \tan(4{,}3) \approx 2{,}2km$, arrondi au dixième de kilomètre près.

3/b/ Calculons la longueur AB du diamètre du cratère de Lune

L'énoncé nous dit que la longueur CD représente 20% du diamètre du cratère. Cela veut dire que $CD = \frac{20}{100} \times AB$, donc que $AB = CD \times \frac{100}{20} = 29 \times \frac{100}{20} = 145km$.
On en déduit que le diamètre du cratère de Lune est de 145 kilomètres.

Exercice 4 : B2I

	A	B
	x	**$2x^2$-3x-9**
1	**-2,5**	**11**
2	**-2**	**5**
3	**-1,5**	**0**
4	**-1**	**-4**
5	**-0,5**	**-7**
6	**0**	**-9**
7	**0,5**	**-10**
8	**1**	**-10**
9	**1,5**	**-9**
10	**2**	**-7**
11	**2,5**	**-4**
12	**3**	**0**
13	**3,5**	**5**
14	**4**	**11**
15	**4,5**	**18**
16	**5**	**26**
17	**6**	**45**

<u>1/ Qu'apparaît-il dans la cellule B17 si on entre 6 dans la cellule A17 ?</u>

L'énoncé dit que les cellules de la colonne B donnent les valeurs de l'expression $2x^2 - 3x - 9$ pour les valeurs données dans la colonne A.
Ainsi, pour $x = 1$ (cellule A8), on a
$2 \times 1^2 - 3 \times 1 - 9 = 2 - 3 - 9 = -10$ (cellule B8), et ainsi de suite…

On fait pareil pour 6. On pose $x = 6$ dans la cellule A17.
Le tableur calcule donc $2 \times 6^2 - 3 \times 6 - 9 = 72 - 18 - 9 = 45$.
Le résultat qui apparaîtra dans la cellule B17 est donc 45 (en vert dans le tableau).

<u>2/ Trouvons deux solutions de l'équation $2x^2 - 3x - 9 = 0$:</u>

On sait que le résultat souhaité 0. On regarde donc dans la colonne B à quels endroits on trouve la valeur 0. Sans faire de calcul, on voit que
$2x^2 - 3x - 9 = 0$ pour $x = -1,5$ et $x = 3$ (en rouge dans le tableau).

<u>3/Donnons une valeur de x pour laquelle l'aire de ce rectangle vaille 5 cm^2:</u>

L'aire d'un rectangle est égale à : $Aire = Longueur \times largeur$.
Ici, on a $Longueur = 2x + 3$ et $largeur = x - 3$. L'aire est donc l'expression suivante :
$\boldsymbol{Aire} = (2x + 3) \times (x - 3) = 2x \times x + 2x \times (-3) + 3 \times x + 3 \times (-3) = 2x^2 - 6x + 3x - 9$
$= \boldsymbol{2x^2 + 3x - 9}$
On constate que l'aire est égale à la fonction étudiée dans le tableau.
Le problème revient à résoudre l'équation $2x^2 - 3x - 9 = 5$. Sans faire de calculs, on voit que $2x^2 - 3x - 9 = 5$ pour $x = -2$ et $x = 3,5$ (en bleu dans le tableau). Or, une longueur ne peut pas être négative, **on en déduit que le rectangle présente une aire de $5\ cm^2$ pour $x = 3,5\ cm$.**

Exercice 5 : Les volumes

<u>1/ a/ Vérifions que l'aire de la base de la pyramide est bien de 36 cm^2 :</u>

L'énoncé fournit la formule qui donne le volume d'une pyramide : $V(pyramide) = \frac{A(base) \times hauteur}{3}$.
En remplaçant par les valeurs données dans l'énoncé, on a : $108 = \frac{A(base) \times 9}{3} = 3 \times A(base)$,
d'où $A(base) = \frac{108}{3} = 36\ cm^2$. **L'aire de la base de la pyramide est donc bien de $36\ cm^2$.**

<u>1/b/ Déduisons-en la valeur de AB :</u>

On sait que $SABCD$ est une pyramide à base carrée de côté $[AB]$ et que ce carré a pour aire $36\ cm^2$. On en déduit que $AB^2 = 36$.
Donc $AB = \sqrt{36} = 6$ ou $AB = -\sqrt{36} = -6$.
Or, une longueur ne peut pas être négative,
on en déduit que $ABCD$ est un carré de côté égal à $6\ cm$.

<u>**Rappel : Equation du type $x^2 = a$**</u>
3 cas possibles :
- Si $a < 0$, il n'y a pas de solution (un carré est positif ou nul)
- Si $a = 0$, alors $x = 0$
- Si $a > 0$, il y a deux solutions :
  $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$

1/c/ Calculons le périmètre du triangle ABC :

Le périmètre du triangle ABC est égal à $Périmètre(ABC) = AB + BC + AC$.
On sait que $ABCD$ est un carré. Donc le triangle ABC est rectangle en B.
On sait que $AB = BC = 6\ cm$.
De plus, d'après le théorème de Pythagore, on a
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 6^2 + 6^2 = 36 + 36 = 72$.
On a donc $AC = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Rappel : Pythagore
Il est interdit d'utiliser le théorème de Pythagore si on ne dit pas que le **triangle est rectangle**

On a donc $Périmètre(ABC) = AB + BC + AC = 6 + 6 + 6\sqrt{2} = 12 + 6\sqrt{2}$ cm.
Le périmètre du triangle ABC est donc bien de $12 + 6\sqrt{2}$ cm.

2/a/ Calculons le volume de la pyramide $SMNOP$:

Rappel :

Distances : Unités : m → k
Surfaces : Unité : m² → k²
Volumes : Unité : m³ → k³

On sait que la pyramide $SMNOP$ est une réduction de la pyramide $SABCD$.
On en déduit que les surface $ABCD$ et $MNOP$ sont
dans une configuration de Thalès. L'aire du carré $MNOP$ est égale à $4\ cm^2$.
De plus, l'aire du petit carré s'exprime par la relation : $A(petit\ carré) = k^2 \times A(grand\ carré)$.
On en déduit que $k^2 = \frac{A(petit\ carré)}{A(grand\ carré)} = \frac{4}{36} = \frac{4\times1}{4\times9} = \frac{1}{9}$.

On trouve alors la valeur du coefficient de réduction: $k = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$.
Enfin, il est possible de trouver le volume de la pyramide $SMNOP$ par la relation :
$V(petite\ pyramide) = k^3 \times V(grande\ pyramide) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 108 = 4\ cm^3$.
Le volume de la petite pyramide est donc égal à 4 cm³.

Rappel :
Il s'agit de la **même valeur de k** pour les distances, pour les aires et pour les volumes

2/ b/ Elise a-t-elle raison ?

Ici, on cherche à calculer une distance.
Or, pour les distances, dans une configuration de Thalès, on utilise la formule suivante :
$d(petite\ distance) = k \times d(grande\ distance)$.
On a donc : $MN = k \times AB = \frac{AB}{3}$, $NO = k \times BC = \frac{BC}{3}$
et $MO = k \times AC = \frac{AC}{3}$.

Truc :

Ici, on **ne nous demande pas** de calculer le périmètre du triangle MNO, mais juste de prouver qu'il vaut le tiers du périmètre du triangle ABC. Il est donc **inutile** de calculer le périmètre de MNO.

On en déduit que $Périmètre(MNO) = MN + NO + MO = \frac{AB}{3} + \frac{BC}{3} + \frac{AC}{3} = \frac{1}{3} \times Périmètre(ABC)$.
Le périmètre de MNO est donc bien égal au tiers du périmètre de ABC. Elise a raison.

Exercice 6 : La sonde Rover Curiosity

1/ Calculons la durée du vol en heures :

L'énoncé nous apprend que la sonde a mis 255 jours pour arriver sur la planète Mars. Or, il y a 24 heures dans une journée. La durée de vol a donc été : $t = 255 \times 24 = 6120\ h$.
La durée de vol de la sonde a donc été de 6120 heures.

2/ Déterminons la vitesse moyenne de la sonde :

> **Rappel : Calcul de vitesse :**
> Pour calculer une vitesse en km/h, il faut exprimer la distance en kilomètres et la durée en heures.

La distance est de 560 millions de kilomètres soient 560×10^6 km.
La durée de vol est de 6120h (calculée à la question précédente)
Par définition, on a $vitesse = \frac{distance}{durée} = \frac{560 \times 10^6}{6120} \approx 91500$km/h.
La vitesse moyenne est donc d'environ 91500 km/h, arrondi à la centaine près.

3/ Trouvons l'heure à laquelle les images sont parvenues au centre de la NASA :

> **Atention : Unités :**
> Lorsqu'on exprime une vitesse en km/**h** et une distance en km, la durée est obtenue en **heures**.
>
> Par contre, lorsqu'on exprime une vitesse en km/**s** et une distance en km, la durée est obtenue en **secondes**.

L'énoncé nous donne l'heure d'émission du signal. Il faut donc trouver la durée du transfert. On sait que le signal a parcouru 248×10^6 kilomètres à la vitesse moyenne de 300000km/s.
Par définition on a $vitesse = \frac{distance}{durée}$.
On a donc $durée = \frac{distance}{vitesse} = \frac{248 \times 10^6}{300000} \approx 827s$.

Convertissons cette durée en minutes. On sait que dans une minute il y a 60 secondes.

	Minutes	Secondes
Information connue et certaine	1	60
Information cherchée	x	827

On en déduit que la durée en minutes est de $t = \frac{827 \times 1}{60} \approx 13{,}78$ (soient environ 14 minutes).
Or, le signal est parti de la sonde à $7h48$. On calcule donc $7h48 + 0h14 = 8h02$.
Le signal est donc arrivé peu avant 8h02.

> Pour ceux et celles qui voulaient, trouver l'heure d'arrivée du signal à la seconde près, voici ci-dessous ce qu'il fallait faire.

La durée en minutes était de 13,78 minutes. On enlève les minutes (13). L'idée est donc de savoir à combien de secondes correspondent 0,78 minutes. On sait que dans une minute il y a 60 secondes.

	Minutes	Secondes
Information connue et certaine	1	60
Information cherchée	0,78	x

On a donc $x = \frac{60 \times 0{,}78}{1} \approx 47$ secondes. La durée du transfert a donc été de 13 minutes et 47 secondes.
Or, le signal est parti de la sonde à $7h48$. On calcule donc $7h48 + 0h13min47s = 8h01min47s$.
Le signal est donc arrivé 8h01 et 47 secondes.