**VI. Théorèmes des limites**

**VI. 1) Théorème de comparaison des limites :**

\* Soit (Un) une suite divergente vers +∞ et (Vn) une suite telle que

pour tout entier n, n≥n0, Vn ≥ Un,

Alors, (Vn) est divergente vers +∞.

\* Soit (Un) une suite divergente vers −∞ et (Vn) une suite telle que

pour tout entier n, n≥n0, Vn ≤ Un,

Alors (Vn) diverge vers −∞.

**Preuve :**  
*On considère un intervalle de la forme ]a;+∞[ où a est un réel.*

*(Un) diverge vers +∞ donc à partir d'un certain rang N les termes de la suite (Un) sont dans l'intervalle ]a; +∞[.*

*A partir d'un certain rang n0, Vn ≥ Un donc à partir du plus grand des rangs N et n0, les termes de la suite (Vn) sont dans ]a;+∞[ ce qui démontre que la suite (Vn) est divergente vers +∞.*

|  |  |
| --- | --- |
| **VI.2) Théorème d’encadrement (dit théorème des gendarmes) :**  Soient U, V et W des suites avec V et W convergentes  vers une même limite l  Si, à partir d'un certain rang, Vn ≤ Un ≤ Wn,  alors la suite (Un) est convergente vers l. |  |

**Preuve** :  
On considère un intervalle ouvert contenant l.

Il existe donc un nombre réel e strictement positif tel que ]l − e; l + e[ est inclus dans cet intervalle.

La suite (Vn) converge vers l donc à partir d'un certain rang N, Vn est supérieur à l − e.

La suite (Wn) est convergente donc à partir à partir d'un certain rang N′, Wn< l+e.

En outre, à partir d'un certain rang N′′, on a Vn ≤ Un≤ Wn, donc à partir du plus grand des trois rangs N, N′ et N′′, on a Un ≤ Vn ≤ l−e et Un ≤ Wn≤ l+e

Donc,les termes Wn sont dans l'intervalle considère.   
Ceci montre que la suite converge vers l.

**VI.3)Théorème de la limite monotone :**

**Toute suite monotone et bornée est convergente.   
.  
.**

Preuve : Admis

**Conséquence de cette propriété :**

Soit (Un) une suite croissante.  
Si (Un) n'est pas majorée alors elle est divergente vers +∞. •

Si (Un) est majorée, alors elle est convergente.

Preuve :

* Soit (Un) une suite croissante et non majorée et soit M un réel.

Il s'agit de montrer qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle]M : +∞[.  
La suite n'est pas majorée par M donc il existe un rang N tel que UN soit supérieure strictement à M, c'est à dire UN ∈]M;+∞[. Puisque la suite est croissante, pour tout n ≥ N, Un ≥ UN > M donc Un ∈]M;+∞[.  
Cela signifie que la suite admet pour limite +∞.

**VI. 4)VII) Théorème : Limite de suites géométriques**

Soit q un réel. Alors :  
• Si q > 1, alors la suite (qn) a pour limite +∞;  
• si−1<q<1, alors la suite(qn) a pour limite 0;

• si q < −1, alors la suite (qn) n'a pas de limite et elle est alternée.

Preuve :

* Si q > 1 alors q = 1+x avec x > 0.

Considérons la fonction h définie par h(x) = (1+x)n −(1+nx).

La fonction h est définie et deérivable sur [0; +∞[

h′(x) = n(1 + x)n−1 − n = n((1 + x)n − 1.

Pour tout x ≥ 0, on a h′(x) ≥ 0 donc h est croissante et de h(0) = 0

On déduit que : (1+x)n−(1+nx) ≥ 0 donc (1+x)n ≥1+nx.  
Et Puisque lim (1 + nx) = +∞,

Alors par comparaison, on a qn = (1 + x)n qui tend vers +∞ quand n tend vers +∞, diverge vers +∞ .

* Si−1<q<1, alors |q| <1 donc  >1 et d'après le cas précédent lim  = +∞

d'où, par inverse , (|q|n) tend vers 0.  
  
Par suite, si q > 0 ou si n est pair on a |q|n =qn et sinon |q|n = −qn

D’où : l’encadrement −|q|n ≤ qn ≤ |q|n

Et en appliquant le théorème des gendarmes (qn) tend vers 0.

• Si q = −1, la suite des termes impairs est dans ] − ∞; −1[ et la suite des termes paires est dans [1 + ∞[ donc la suite (qn) ne peut pas converger. Elle diverge.

**VII. Limite d’une suite définie par récurrence :**

