| TS<br><br>ACoco | **DS 2 de Mathématiques**<br>**2h**<br>**16/09/15** | | **Nom :**<br>**Prénom :** |
|---|---|---|---|
| **CALCULATRICE INTERDITE** | Acquis | Revoir | Note et observation(s) : |
| Nombre complexe forme algébrique | | | |
| Nombre complexe forme trigonométrique | | | |
| Géométrie complexe. | | | |
| Raisonnement par récurrence | | | |

**Exercice 1**

Montrer par récurrence que $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots.. + (2n-1) = n^2$ pour tout entier naturel $n \geq 0$.

**Exercice 2**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer **en justifiant**, si elle est vraie ou fausse .

*Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée :*

1. ***Proposition 1 :*** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifié l'égalité $|z-i|=|z+1|$est une droite.
2. ***Proposition 2 :*** Le nombre complexe $(1 + i\sqrt{3})^4$ est un nombre réel.
3. ***Proposition3 :*** *L'ensemble des points* M *du plan d'affixe* $z = x+iy$ *tels que* $|z-1+i|=|3-i|$ *a pour équation:* $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$.

**Exercice 3 D'après sujet du BAC.**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives :

$$z_A = 2,\ z_B = 1 + i\sqrt{3},\ z_C = 1 - i\sqrt{3}.$$

**Partie A**

**1. a)** Déterminer une forme trigonométrique de $z_A$, $z_B$ et $z_C$.

**b)** En déduire, sur le graphique donné en annexe, la construction des points $B$ et $C$. Placer également le point $A$.

**2.** Démontrer (en utilisant les nombres complexes) que le quadrilatère $OBAC$ est un losange.

**3.** Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des points du plan $M$ d'affixe $z$ tels que $|z| = |z-2|$.

**a)** Montrer que $B$ et $C$ appartiennent à $\mathscr{D}$.

**b)** Déterminer, puis représenter l'ensemble $\mathscr{D}$.

**Partie B**

À tout point $M$ du plan d'affixe $z$ tel que $z \neq z_A$, on associe le point $M'$ d'affixe $z'$ défini par

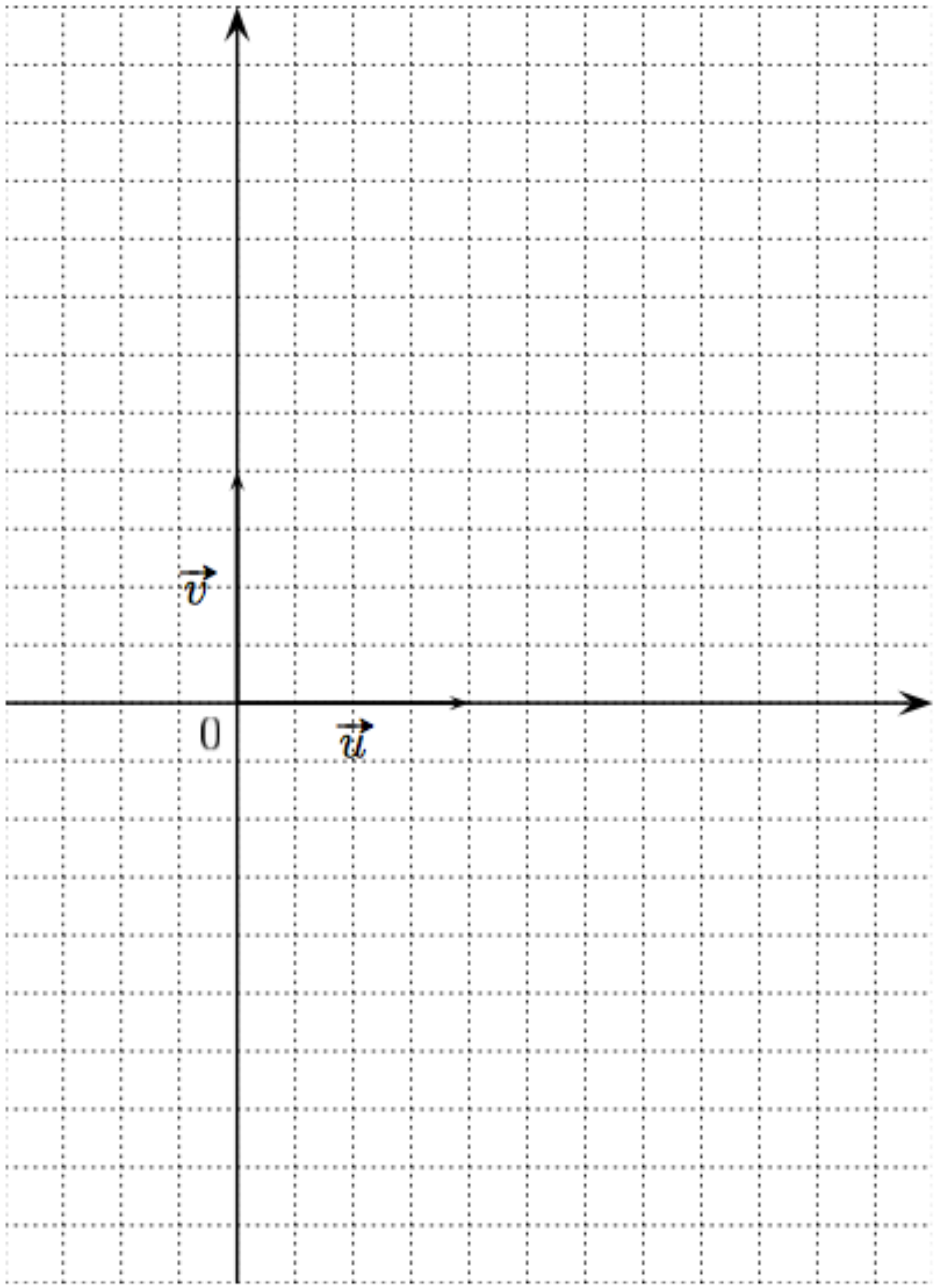
$$z' = \frac{-4}{z-2}$$

.

**1. a)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z = \dfrac{-4}{z-2}$.

**b)** En déduire les images des points $B$ et $C$ par la transformation définie ci-dessus.

TS ANNEXE DU DS 2 NOM :
PRENOM :




Comme il reste de la place, je vous colle ceci :

TS DS 2 21/09/15 CORRECTION

Exercice 1

Montrer par récurrence que $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

1) **Au rang n = 1 :** on a d'une part : 1 D'autre part : n^2 = 1^2 =1 donc l'égalité est vérifiée.
2) **On suppose la propriété vraie au rang n :** $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$
3) **Démontrons qu'elle est vraie au rang n+1 :** $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) + (2(n+1) - 1) = (n+1)^2$

On remarque que : $\underline{1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)} + (2(n+1) - 1)$

$= \quad n^2 \quad + (2(n+1) - 1)$

$= n^2 + 2n + 2 - 1$

$= n^2 + 2n + 1$

$= (n+1)^2$

On a donc montrer que la propriété est vraie au rang n+1

Le principe de récurrence s'applique, et donc la propriété est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Exercice 2

1. ***Proposition 1 :*** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifié l'égalité $|z - i|=|z + 1|$est une droite.
   L'ensemble des points M tels que $|z - i| = |z - (-1)|$ est la médiatrice du segment [AB] avec A le point d'affixe i et B le point d'affixe -1. Cette proposition est VRAIE.
2. ***Proposition 2 :*** Le nombre complexe $(1 + i\sqrt{3})^4$ est un nombre réel.
   Calculons : $(1 + i\sqrt{3})^2 = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 = -2 + 2i\sqrt{3}$
   $(1 + i\sqrt{3})^4 = (-2 + 2i\sqrt{3})^2 = (4 - 8i\sqrt{3} - 12) = -8 - 8i\sqrt{3}$ n'est pas un réel,
   donc cette proposition est FAUSSE.
3. ***Proposition3 :*** *L'ensemble des points* M *du plan d'affixe* $z = x+iy$ *tels que* $|z-1+i|=|3-i|$ *a pour équation:* $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$.
   TU LE VOIS LE LIEN AVEC LE PRODUIT SCALAIRE !!!! C'EST BEAU N'EST CE PAS ? ET TU ES EMMERVEILLE(E) PAR CES SAVOIRS SE REJOIGNANT SOUS TES YEUX EBAILLIS.

$|z-1+i|=|3-i| \Leftrightarrow |x+iy-1+i| = |3-i| \Leftrightarrow |x-1+i(y+1)| = |3-i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = \sqrt{3^2+1^2} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = \sqrt{10}$ On élève au carré de part et d'autre :

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$ et non pas 2.

Cette proposition est donc FAUSSE.

**Exercice 3** $z_A = 2$ $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ $z_C = 1 - i\sqrt{3}$

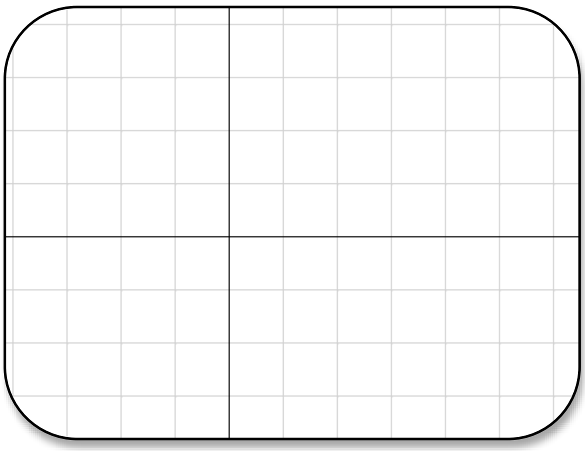
**PARTIE A**

**1.a) <u>Forme trigonométrique :</u>**

* $z_A = 2$ $|z_A| = 2$ et $\arg(z_A) = 0$ ( car $z_A$ est un réel positif, donc situé sur l'axe des réels positifs.

* $z_B = 1 + i\sqrt{3}$

Module : $|z_B| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$ **1.b)**



Argument : $\arg(z_B) = \boldsymbol{\theta}$

on a $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ b > 0 \end{cases}$ donc $\boxed{\arg(z_B) = \boldsymbol{\theta} = \pi/3\ [2\pi]}$

* $z_C = 1 - i\sqrt{3} = \overline{z_B}$

Module : $|z_C| = |1 - i\sqrt{3}| = |\overline{z_B}| = |z_B| = 2$

Argument : $\arg(z_C) = \arg(\overline{z_B}) = -\arg(z_B)$

**<u>2. Calculons les longueurs de OB, BA, AC et OC :</u>**

$OB = |z_B| = 2$ $BA = |z_B - z_A| = |1 + i\sqrt{3} - 2| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = 2$

$OC = |z_C| = 2$ $AC = |z_C - z_A| = |1 - i\sqrt{3} - 2| = |-1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = 2$

Comme OB=BA=AC=OC = 2.

**3. *D* L'ENSEMBLE DES POINT M TELS QUE | z | = | z – 2 |**

a) On a vu que $|z_C| = |z_B| = 2$ ( 1.b) et ci dessus ( 2) que $|z_B - z_A| = |z_B - 2| = 2$
et $|z_C - z_A| = |z_C - 2| = 2$ Donc les points B et C appartiennent à *D*.

b) L'ensemble des points M tels que : $|z| = |z - 2| \Leftrightarrow OM = AM$
$\Leftrightarrow$ M est sur la médiatrice du segment [ OA] .
Elle passe bien par B et C, qui sont équidistants des sommets O et A du losange OBAC.

**PARTIE B :**

1.a) $z = \dfrac{-4}{z-2}$ comme $z \neq 2$ alors : $z^2 - 2z + 4 = 0$

$\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$ L4équation admet deux solutions complexes conjuguées.

$$z_1 = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3} = z_B \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2-2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3} = z_C$$

b) Les images de $z_B$ et $z_C$ par cette application sont eux mêmes.