# DEVOIR DE MATHEMATIQUES N°1 - Correction

**Généralités sur les fonctions**

## Exercice 1 :

a) $f(x) = \dfrac{\cos x}{4 - x^2}$

f(x) existe si et seulement si $4 - x^2 \neq 0$, *soit* $x \neq 2$ *et* $x \neq -2$ donc **$D_f$ =** $\mathbb{R} - \{-2 ; 2\}$

$D_f$ est symétrique par rapport à l'origine, donc pour tout $x \in D_f$ ,

$f(-x) = \dfrac{\cos(-x)}{4 - (-x)^2} = \dfrac{\cos(x)}{4 - x^2} = f(x)$ donc la **fonction f est paire.**

b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(4 + x)(5 - x)}}$

g(x) existe si et seulement si ( 4 + x ) ( 5 - x ) > 0

| x | $-\infty$ ; $-4$ | $-4$ ; $5$ | $5$ ; $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| ( x + 4 ) | - | + | + |
| ( 5 - x ) | + | + | - |
| ( x + 4 ) ( 5 - x ) | - | + | - |

Ainsi **$D_g$ = ] - 4 ; 5 [**

$D_g$ n'est pas centré en 0 . **La fonction g n'est donc ni paire ni impaire.**

## Exercice 2 :

Dans tous les cas, $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

a ) f : x $\longmapsto$ | x | et g quelconque

Pour tout x ∈ I,R, on a :

- ( g ∘ f ) ( x ) = g ( f ( x ) ) = g (| x | )
- ( g ∘ f ) ( - x ) = g (| - x | ) = g (| x | ) donc **g ∘ f est paire**

b ) g : x $\longmapsto$ | x | et f quelconque

Pour tout x ∈ I,R, on a :

( g ∘ f ) ( x ) = g ( f ( x ) ) =| f ( x )| **On ne peut pas conclure sur la parité de la fonction.**

contre-exemple : f : x $\longmapsto$ 2x - 1 ( g ∘ f ) ( 1 ) = 1 et ( g ∘ f ) ( - 1 ) = 3

c ) f et g sont impaires.

Pour tout x ∈ I,R, on a :

f est impaire

( g ∘ f ) ( - x ) = g ( f ( - x ) ) = g ( - f ( x )) = - g ( f ( x )) = - ( g ∘ f ) ( x ) **donc g ∘ f est impaire**

g est impaire

**Exercice 3 :**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -3x^2 + 5$

Soit g : x $\longmapsto$ - 3 x + 5 et h : x $\longmapsto$ x ² $\quad x \xrightarrow{h} x^2 \xrightarrow{g} -3x^2 + 5$

Pour tout x $\in \mathbb{R}$ , f ( x ) = - 3 h ( x ) + 5 = g ( h ( x)) = ( g $\circ$ h ) ( x )

Donc f = g $\circ$ h

- La fonction h , fonction carrée, est strictement décroissante sur ] - ∞ ; 0 ] , et l'image de cet intervalle par h est h ( ] - ∞ ; 0 ] ) = [ 0 ; + ∞ [
  g est une fonction affine à coefficient directeur négatif donc g est strictement décroissante sur [ 0 ; + ∞ [ .

On en déduit que f = g $\circ$ h est la composée de deux fonctions strictement décroissantes donc **f est strictement croissante sur ] - ∞ ; 0 ] .**

- La fonction h , fonction carrée, est strictement croissante sur [ 0 ; + ∞ [ , et l'image de cet intervalle par h est h ([ 0 ; + ∞ [) = [ 0 ; + ∞ [
  g est une fonction affine à coefficient directeur négatif donc g est strictement décroissante sur [ 0 ; + ∞ [ .

On en déduit que f = g $\circ$ h est la composée d'une fonction strictement croissante et d'une fonction strictement décroissante donc **f est strictement décroissante sur [ 0 ; + ∞ [.**

**Exercice 4 :**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 2}$. On note $C_f$ sa courbe représentative.

On veut démontrer que le point A( 2 ; 3 ) est centre de symétrie de $C_f$.

Pour tout $x \in D_f$ , (2+x) $\in D_f$ et (2 – x) $\in D_f$ .

De plus : $f\left(x_A + x\right) + f\left(x_A - x\right) = f\left(2 + x\right) + f\left(2 - x\right) = \dfrac{\left(2+x\right)^2 - \left(2+x\right)}{\left(2+x\right) - 2} + \dfrac{\left(2-x\right)^2 - \left(2-x\right)}{\left(2-x\right) - 2}$

$= \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x} + \dfrac{x^2 - 3x + 2}{-x} = \dfrac{6x}{x} = 6 = 2 \times 3 = 2y_A$

On en déduit que **A est centre de symétrie de $C_f$**

**Exercice 5 :**

Soit la fonction f définie sur $\left]\dfrac{1}{4}; +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{-3}{\left(-4x+1\right)^2}$.

Soit a et b deux réels du domaine de définition de f tels que : $\dfrac{1}{4} < a < b$

$$-1 > -4a > -4b$$
$$0 > -4a+1 > -4b+1$$
Alors, $$0 < (-4a+1)^2 < (-4b+1)^2$$
$$\frac{1}{(-4a+1)^2} > \frac{1}{(-4b+1)^2}$$
$$\frac{-3}{(-4a+1)^2} < \frac{-3}{(-4b+1)^2}$$

On en déduit donc que pour tout a et b appartenant à $\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$ tels que $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.

**Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur** $\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$ **.**

## Exercice 6 :

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$.

$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ car on doit avoir $3x-2 \neq 0$

$D_g = [-2;+\infty[$ car on doit avoir $x+2 \geq 0$

- $g \circ f(x) = g[f(x)] = g\left(\dfrac{1}{3x-2}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{3x-2}+2} = \sqrt{\dfrac{6x-3}{3x-2}}$

  $g \circ f$ existe si et seulement si $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x \neq \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{3x-2} \geq -2 \end{cases}$

$\dfrac{1}{3x-2} \geq -2$ équivaut à $\dfrac{1}{3x-2} + 2 \geq 0$ *soit* $\dfrac{6x-3}{3x-2} \geq 0$

| x | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $6x-3$ | - | + | + |
| $3x-2$ | - | - | + |
| $\dfrac{6x-3}{3x-2}$ | + | - | + |

Ainsi $g \circ f$ existe si et seulement si $\begin{cases} x \neq \dfrac{2}{3} \\ x \in \left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{2}{3};+\infty\right[ \end{cases}$

Donc, $D_{g\circ f} = \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right] \cup \left]\frac{2}{3} ; +\infty\right[$

- $f\circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\sqrt{x+2}\right) = \dfrac{1}{3\sqrt{x+2}-2}$

  $f\circ g$ existe si et seulement si $\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x \geq -2 \\ \sqrt{x+2} \neq \frac{2}{3} \end{cases}$

or, $x+2$ *et* $\frac{2}{3}$ sont deux nombres positifs, donc $\sqrt{x+2} \neq \frac{2}{3}$ équivaut à $x+2 \neq \frac{4}{9}$ soit $x \neq -\frac{14}{9}$

Donc, $D_{f\circ g} = \left[-2 ; -\frac{14}{9}\right[ \cup \left]-\frac{14}{9} ; +\infty\right[$

**<u>Exercice 7 :</u>**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-3\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+7}{x+3}$.

1- $f(x) = \dfrac{2x+7}{x+3} = \dfrac{2(x+3)+1}{x+3} = 2 + \dfrac{1}{x+3}$ d'où $a = 2$ *et* $b = 1$

2- La fonction f est une fonction associée à la fonction inverse, translatée de vecteur $-3\vec{i} + 2\vec{j}$.
C'est donc une hyperbole de centre le point de coordonnées (-3 ; 2)
**f est donc une fonction strictement décroissante sur** $]-\infty ; -3[$ **et sur** $]-3 ; +\infty[$

3- Tableau de variation de la fonction f :

| x | $-\infty$ | $-3$ | ‖ | $-3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 2 ↘ | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | 2 |

**<u>Exercice 8 :</u>**

Soit f la fonction dont le tableau de variation est :

| x | -3 | -1 | 0 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | -4 | ↗ | 2 | ↘ | 1 | ↗ | 3 | ↘ | -1 |

A- Tableaux de variation des fonctions suivantes:

1- $g(x) = -f(x+1)$ Translation de $-\vec{i}$ et symétrie /(Ox)

| x | -4 | | -2 | | -1 | | 3 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| g(x) | 4 | ↘ | -2 | ↗ | -1 | ↘ | -3 | ↗ | 1 |

2- $h(x) = f(-x) - 2$ Symétrie /(Oy) et translation de $-2\vec{j}$

| x | -5 | | -4 | | 0 | | 1 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h(x) | -3 | ↗ | 1 | ↘ | -1 | ↗ | 0 | ↘ | -6 |

3- $p(x) = 2f(3x)$ On divise les abscisses par 3 et on multiplie les ordonnées par 2

| x | -1 | -1/3 | 0 | 4/3 | 5/3 |
|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p(x) | | | 4 | | | | 6 | | |
| | | ↗ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |
| | -8 | | | | 2 | | | | -2 |

B- D'après le tableau de variation de la fonction f, l'équation $f(x)=0$ admet 2 solutions sur $\left[-3;5\right]$, notées $\alpha$ *et* $\beta$, avec $-3<\alpha<-1$ *et* $4<\beta<5$

C- Sur $\left[-3;5\right]$ on connaît les variations de la fonction f.

La fonction k est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^{+}$ et décroissante sur $\mathbb{R}^{-}$.

On sait aussi que f est une fonction positive sur $\left[\alpha;\beta\right]$ et négative sur $\left[-3;\alpha\right]\cup\left[\beta;5\right]$.

Sachant que si deux fonctions ont les mêmes sens de variation, la fonction composée est croissante, alors que si deux fonctions ont des sens de variations contraires, la fonction composée est décroissante, on peut en déduire le tableau de variations de la fonction $k\circ f$ .

| x | -3 | | $\alpha$ | | -1 | | 0 | | 4 | | $\beta$ | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k\circ f(x)$ | 16 | | | | 4 | | | | 9 | | | | 1 |
| | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |
| | | | 0 | | | | 1 | | | | 0 | | |

$g\circ f\left(-3\right)=g\left[f(-3)\right]=g\left(-4\right)=\left(-4\right)^{2}=16$

$g\circ f\left(\alpha\right)=g\left(0\right)=0$

$g\circ f\left(-1\right)=g\left(2\right)=4$

$g\circ f\left(0\right)=g\left(1\right)=1$

$g\circ f\left(4\right)=g\left(3\right)=9$

$g\circ f\left(\beta\right)=g\left(0\right)=0$

$g\circ f\left(5\right)=g\left(-1\right)=1$