# 1. Introduction

Pour tout le chapître, le plan est muni d'un repère orthonormal.

DÉFINITION

**le produit scalaire de deux vecteurs** $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le **réel** noté $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ défini par :
$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\right)$.

## a) Produit scalaire et orthogonalité

PROPRIÉTÉ

Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux équivaut à dire que $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$

## b) Règles de calcul

PROPRIÉTÉS

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ , $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ :
- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{0}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{0}=0$
- Pour tout réel $k$, $(k\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}\cdot(k\overrightarrow{v})=k\times(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$
- $\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$
- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}$ est noté $\overrightarrow{u}^2$ et est appelé carré scalaire de $\overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u}^2=\|\overrightarrow{u}\|^2$ (carré de la longueur du vecteur $\overrightarrow{u}$)
- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2=\overrightarrow{u}^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2$ (cela signifie que $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}$ )
- $(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2=\overrightarrow{u}^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2$
- $(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=\overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{v}^2$

# 2. Produit scalaire et géométrie analytique

PROPRIÉTÉ

Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=xx'+yy'$ et $\overrightarrow{u}^2=x^2+y^2$

► *Exemple :* soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=3\times2+(-1)\times6=6-6=0$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

## a) Applications aux équations de droite

PROPRIÉTÉS

- Rappel : toute droite admet une équation (dite cartésienne) de la forme $ax+by+c=0$ (avec $(a,b)\neq(0,0)$) et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite.
- On appelle vecteur normal d'une droite tout vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul et orthogonal à un vecteur directeur de la droite.
- Si une droite admet une équation de la forme $ax+by+c=0$ alors $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de cette droite et, réciproquement, si une droite admet le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ comme vecteur normal alors elle admet une équation de la forme $ax+by+c=0$.

► *Exemple :* Soit $A\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$. • Déterminons une équation de la médiatrice de $[BC]$.

Le vecteur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la médiatrice qui admet donc une équation de la forme $-2x-8y+c=0$.

La médiatrice doit passer par $I\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, le milieu de $[BC]$. On en déduit que $-2\times0-8\times(-1)+c=0\Leftrightarrow c=-8$.

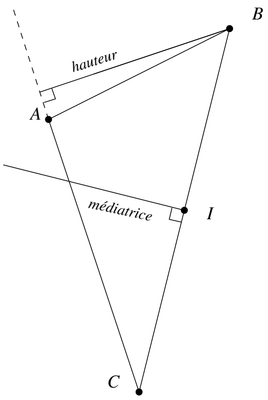
Une équation de la médiatrice est donc : $-2x-8y-8=0$.

• Déterminons une équation de la hauteur issue de $B$ dans le triangle $ABC$.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de cette hauteur qui admet donc une équation de la forme $2x-6y+c=0$

. La hauteur passe par le point $B$. On en déduit que $2\times 1-6\times 3+c=0 \Leftrightarrow c=16$.

Une équation de la hauteur est donc : $2x-6y+16=0$.



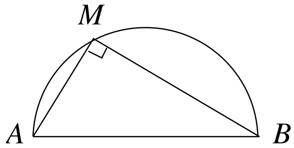

► **Remarque :** La droite $D$ d'équation $ax+by+c=0$ est perpendiculaire à la droite $D'$ d'équation $a'x+b'y+c'=0$ si et seulement si un vecteur directeur de $D$ est orthogonal à un vecteur directeur de $D'$. Ainsi, $D\perp D' \Leftrightarrow \overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}\cdot \overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (-b)\times(-b')+a\times a'=0 \Leftrightarrow aa'+bb'=0$.

## b) Applications aux équations de cercle

Pour déterminer une équation du cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et de rayon $R$, il suffit d'exprimer qu'un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartient au cercle si et seulement si $\Omega M^2=R^2$.
Une équation est donc : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

► *Exemple :* une équation du cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et de rayon 3 est : $(x-1)^2+(y-2)^2=9$.

Pour déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$, il suffit d'exprimer qu'un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartient au cercle si et seulement si le produit scalaire $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}$ est nul.




► *Exemple :* $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$ avec $A\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y+2\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-3\\y-4\end{pmatrix}=0$. Cela équivaut à $(x-1)(x-3)+(y+2)(y-4)=0 \Leftrightarrow x^2-x-3x+3+y^2-4y+2y-8=0$.
Une équation du cercle est donc : $x^2+y^2-4x-2y-5=0$.

# 3. Produit scalaire et géométrie

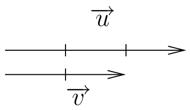
## a) Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires

PROPRIÉTÉ

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls et de même sens alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$ (produit des longueurs)
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls et de sens contraires alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$ (opposé du produit des longueurs)
- Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

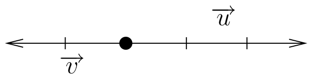
Exemples

Même sens




$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 3 \times 2 = 6$

Sens contraire

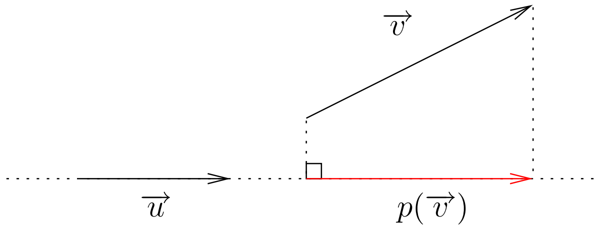



$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -3 \times 2 = -6$

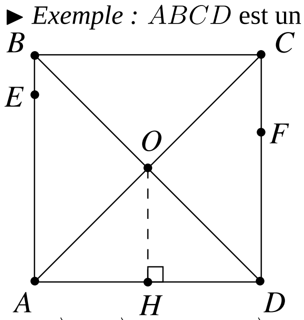
## b) Produit scalaire de deux vecteurs non colinéaires

PROPRIÉTÉ

Etant donné deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Si on note $p(\overrightarrow{v})$, la projection orthogonale de $\overrightarrow{v}$ sur une droite portant $\overrightarrow{u}$, alors on a : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot p(\overrightarrow{v})$
*(on est donc ramené au cas de deux vecteurs colinéaires)*




► *Exemple :* $ABCD$ est un carré avec $AB = 3$

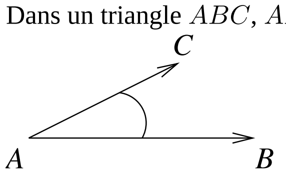



- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ car $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = -3 \times 3 = -9$ car $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires et de sens contraires.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = 3 \times 1,5 = 4,5$ car le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AO}$ sur $(AD)$ est $\overrightarrow{AH}$ et que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens.
- Les produits scalaires $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EF}$ sont tous égaux entre eux. En effet, si on projette orthogonalement $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sur $(AD)$ on obtient à chaque fois $\overrightarrow{AD}$ . Donc tous ces produits scalaires sont égaux à $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \times 3 = 9$.

# 4. Produit scalaire et angles

PROPRIÉTÉ

Dans un triangle $ABC$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.




► **Remarque :** De façon plus générale, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

► *Exemple :* Soit $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $AB=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ . $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $AC=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times1+1\times3=5$, donc $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\dfrac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On peut en déduire que la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est égale à $\dfrac{\pi}{4}$.

PROPRIÉTÉ

**Théorème d'Al Kashi**
Dans un triangle $ABC$, $BC^2=AB^2+AC^2-2\,AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

# 5. Lignes de niveau

## a) Ensemble des points $M$ tels que $MA^2+MB^2=k$

PROPRIÉTÉ

Soit $I$, le milieu du segment $[AB]$ (avec $A\neq B$).
Pour tout point $M$, on a $MA^2+MB^2=2\,IM^2+\dfrac{AB^2}{2}$ *(Théorème de la médiane).*
Etant donné un réel $k$, on en déduit que l'ensemble des points $M$ tels que $MA^2+MB^2=k$ est un cercle, ou un point ou l'ensemble vide.

► *Exemple :* Soit $A$ et $B$ deux points tels que $AB=2$. On cherche à déterminer l'ensemble $E$ des points $M$ tels que $MA^2+MB^2=20$.
On utilise le théorème de la médiane :
$MA^2+MB^2=20\Leftrightarrow 2\,IM^2+\dfrac{AB^2}{2}=20\Leftrightarrow 2\,IM^2+\dfrac{4}{2}=20\Leftrightarrow IM^2=9\Leftrightarrow IM=3$ (car $IM>0$).
L'ensemble $E$ est donc le cercle de centre $I$ et de rayon 3.

## b) Ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$

► **Méthode générale :** on décompose $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en passant par $I$ le milieu de $[AB]$.

► *Exemple :* Soit $A$ et $B$ deux points tels que $AB=4$. On cherche à déterminer l'ensemble $E$ des points $M$ tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=12$.
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=12\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=12$. Or, $\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}$.
On a donc, $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)=12\Leftrightarrow MI^2-IA^2=12\Leftrightarrow MI^2-2^2=12$ (car $IA=\dfrac{AB}{2}$).
On en déduit que $M\in E\Leftrightarrow MI^2=16\Leftrightarrow MI=4$. $E$ est donc le cercle de centre $I$ et de rayon 4.

## c) Ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{u}=k$

► **Méthode générale :** On cherche un point particulier $H$ appartenant à l'ensemble. On a alors $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{u}=k$. Ainsi, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{u}=k\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{u}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AH}\right)\cdot\overrightarrow{u}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{u}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{HM}\perp\overrightarrow{u}$.
L'ensemble est alors la droite passant par $H$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}$.

► *Exemple :* Soit $A$ et $B$ deux points tels que $AB=3$. On cherche à déterminer l'ensemble $E$ des points $M$ tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=-6$.
Soit $H$ le point de la droite $(AB)$ tel que $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient de sens contraires et tel que $AH\times AB=6\Leftrightarrow AH=\dfrac{6}{3}=2$.
Ainsi, on a bien $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=-6$ .
Dès lors, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=-6\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AH}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{HM}\perp\overrightarrow{AB}$.
L'ensemble $E$ est alors la droite perpendiculaire à $(AB)$ et passant par $H$.