Exercice 01 (voir réponses et correction)

Soit ABCD un carré de centre O tel que $AB = a$. Déterminer en fonction de a les produits scalaires :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OB}$

Exercice 02 (voir réponses et correction)

On considère un triangle OAB avec $OA = 5$; $OB = 3$ et $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) = \theta\ [2\pi]$

Faire une figure et calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ pour $\theta = \frac{\pi}{3}$; $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$

Exercice 03 (voir réponses et correction)

Soit OAB un triangle.
On considère le point A', projeté orthogonal de A sur (OB) et B' projeté orthogonal de B sur (OA).
Montrer que $OA' \times OB = OA \times OB'$

Exercice 04 (voir réponses et correction)

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants :

1°) $AB = 3$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$

2°) $AB = 1$, $AC = 2$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{2\pi}{3}$

3°) $BA = 2$, $CA = 2$ et $\widehat{CAB} = \frac{3\pi}{4}$

4°) $BA = 3$, $CA = \sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 05 (voir réponses et correction)

On considère un triangle équilatéral direct ABC tel que $AB = a$. Soit G son centre de gravité.
Soient A', B', C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$.

Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GA}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA'}$; $\overrightarrow{GA'}.\overrightarrow{GB'}$

Exercice 06 (voir réponses et correction)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soient $\vec{u}\,(2 ; 1)$ $\vec{v}\,(3 ; -6)$ $\vec{w}\,(1 ; 3)$
1°) Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ que peut-on en déduire pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?
2°) Calculer $\vec{u}.\vec{w}$; $\|\vec{u}\|$; $\|\vec{w}\|$. Que peut-on en déduire pour l'angle $(\vec{u} ; \vec{w})$?

Exercice 07 (voir réponses et correction)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points A(1 ; −1) B(3 ; 3) C(−4 ; 4) D(2 ; 1)
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 08 (voir réponses et correction)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A(1 ; 2) et B(3 ; −5).
1°) Déterminer (par deux méthodes différentes) l'équation de la médiatrice de $[AB]$.
2°) Déterminer l'équation de la droite passant par C(0 ; 3) et perpendiculaire à (AB).

Exercice 09 (voir réponses et correction)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points A(−3 ; −1) , B(2 ; 1) et C(1 ; 4).

1°) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. En déduire une valeur approchée de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$.

2°) Déterminer de même des valeurs approchées des mesures en degrés des angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{CBA}$.
Vérifier en calculant la somme des mesures des trois angles.

Exercice 10 (voir réponses et correction)

A, B, C et D sont quatre points quelconques du plan.

Démontrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$

Exercice 11 (voir réponses et correction)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. k est un réel.
Soit $\vec{u}\,(k ; -5)$ et $\vec{v}\,(2k - 1 ; k + 4)$. Existe-t-il des valeurs du réel k pour lesquelles $\vec{u} \perp \vec{v}$?

Exercice 12 (voir réponses et correction)

Deux points A et B sont tels que $AB = 4$.

1°) Déterminer l'ensemble des points M tels que : $MA^2 + MB^2 = 26$

2°) Donner, suivant les valeurs du réel k, l'ensemble des points M tels que : $MA^2 + MB^2 = k$.

Exercice 13 (voir réponses et correction)

ABC est un triangle tel que $AB = 3$ $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = 22°$

Donner une valeur approchée de BC. En déduire des valeurs approchées des autres angles du triangle.

Donner une valeur approchée de l'aire du triangle.

Exercice 14 (voir réponses et correction)

ABC est un triangle tel que $AB = 3$ $\widehat{BAC} = 22°$ $\widehat{ABC} = 43°$

Donner une valeur approchée de AC et de BC .

Exercice 15 (voir réponses et correction)

Le point B est la base d'un phare situé en mer.

Le point P est le sommet du phare.

Les points A et C sont deux points sur la plage distants de 1km.

La mesure des angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ACB}$ donne $\widehat{CAB} = 11{,}9°$ et $\widehat{ACB} = 67{,}1°$

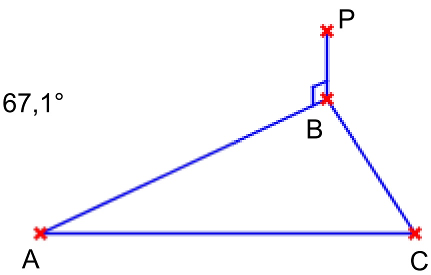
Déterminer les distances AB et BC.

On suppose la plage rectiligne entre A et C.

Déterminer la plus petite distance de la plage à la base du phare.

La mesure de l'angle $\widehat{BCP}$ donne $\widehat{BCP} = 8{,}1°$

Déterminer la hauteur BP du phare.



Pour vérification on mesure l'angle $\widehat{BAP}$. Quelle valeur doit-on trouver ?

Exercice 16 (voir réponses et correction)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On considère le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(2 ; -3)$ et le point A de coordonnées $(1 ; 2)$

1°) Faire un dessin. Représenter l'ensemble D des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \perp \vec{u}$

2°) Démontrer que D est une droite dont on donnera une équation.

(On dit que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal à D)

Exercice 17 (voir réponses et correction)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(1 ; 2)$ et $B(4 ; -2)$.

1°) Soit $M(x ; y)$. Montrer que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + y^2 = 0$

2°) En écrivant la forme canonique de $x^2 - 5x$, déduire de la question précédente que le cercle C de diamètre [AB] a pour équation : $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$

3°) Retrouver ce résultat en déterminant AB et les coordonnées du milieu de [AB].

Exercice 18 (voir réponses et correction)

Application à la trigonométrie : Démonstration des formules d'addition

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j})$. a et b sont deux nombres réels.
On considère le point A de coordonnées polaires (1 ; a) et le point B de coordonnées polaires (1 ; b) dans le repère polaire $(O;\vec{i})$.

1°) Déterminer en fonction de a et b une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$.

En déduire en fonction de a et b, le produit scalaire $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$.

2°) Donner dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ les coordonnées (cartésiennes) de A et B.

En déduire une autre expression du produit scalaire $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$

3°) En comparant les deux expressions du produit scalaire obtenues, démontrer que $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

4°) En utilisant la relation $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, démontrer la relation $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

5°) En utilisant les relations précédentes avec $\frac{\pi}{2} - a$ et b , démontrer les relations

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ et $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Exercice 19 (voir réponses et correction)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
On considère le point A de coordonnées (3 ; −2) et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (−1 ; 3).

Soit Δ l'ensemble des points M(x ; y) tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 21$.
Donner une équation de Δ , donner la nature de Δ et représenter cet ensemble.
Que peut-on dire de Δ et de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$? (Justifier)
Déterminer l'intersection de d et de Δ.

Exercice 20 (voir réponses et correction)

On considère dans le plan deux points A et B tels que AB = 3.

Soit Δ l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$.
Caractériser géométriquement et représenter Δ.

Soit Δ' l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = -18$.
Déterminer un point H de la droite (AB) appartenant à Δ'.

En exprimant $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{HM}$, caractériser géométriquement et représenter Δ'.

Exercice 21 (voir réponses et correction)

On considère dans le plan deux points A et B tels que AB = 5.

1°) Soit Δ l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 17$.
Caractériser géométriquement et représenter Δ.

2°) Soit Δ' l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 0$.
Caractériser géométriquement et représenter Δ'.

3°) Soit Δ'' l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = -75$.
Caractériser géométriquement et représenter Δ''.

Exercice 22 (voir réponses et correction)

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les points A(1 ; 3) et B(4 ; -1).

1°) Soit Δ l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 17$.
Donner l'équation de Δ. Caractériser géométriquement et représenter Δ.

2°) Soit Δ' l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 0$.
Donner l'équation de Δ'. Caractériser géométriquement et représenter Δ'.

3°) Soit Δ'' l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = -6$.
Donner l'équation de Δ''. Caractériser géométriquement et représenter Δ''.

Exercice 23 (voir réponses et correction)

Application : Distance d'un point à une droite

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On considère la droite d d'équation $ax + by + c = 0$ avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$.
Soit A le point de coordonnées $(x_0 ; y_0)$ et soit H$(x_1 ; y_1)$ le projeté orthogonal de A sur d.

1°) Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à la droite d.

2°) En déduire que $\begin{cases} x_1 = x_0 + \lambda a \\ y_1 = y_0 + \lambda b \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

3°) Déterminer la valeur de λ en fonction de a, b, c, x_0 et y_0 .

4°) En déduire la valeur de la distance AH en fonction de a, b, c, x_0 et y_0 .

5°) Justifier que la distance AH est la plus petite distance du point A à un point de d.
On dit que AH est la distance de A à la droite d.

6°) Application : Soit d la droite d'équation $2x + 3y + 5 = 0$ et soit A(4 ; 1).
Déterminer la distance de A à la droite d. Faire un dessin.