ثانوية عبد الله الشفشاوني
2 ب ع A و B

تصحيح الفرض المحروس رقم 3
د . II .

ذ. مصطفى حاميد

التمرين الأول: 1) $\forall t>0:\ g(t)=\frac{2t}{1+t}-\ln(1+t)$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $I=]0,+\infty[$

و: $\forall t>0:\ g'(t)=\frac{\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}}{(1+t)^2}-\frac{(1+t)'}{1+t}=\frac{1-t}{(1+t)^2}$

$\forall t>0:\ (1+t)^2>0$ اذن اشارة $g'(t)$ هي إشارة $1-t$.

$g(0)=0$

$\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=-\infty$

t	0		1		3	α	4		
$g'(t)$		$+$	0			$-$			
g	0	$\nearrow$	$1-\ln 2$	$\searrow$		0		$\searrow$	$-\infty$

g متصلة على $[3,4]$ و $g(3)\cdot g(4)<0$ لأن $g(3)=\frac{3}{2}-\ln(4)<0$ و $g(4)=\frac{8}{5}-\ln(5)>0$ اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد على الأقل عدد حقيقي $\alpha\in[3,4]$ بحيث $g(\alpha)=0$

وبما أن g تناقصية قطعا على $[3,4]$ فإن العدد α وحيد.

2) أ. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$

نضع $X=x^2$ لدينا x يؤول الى 0^+ اذن $X\to0^+$

ومنه: $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{X\to0^+}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$

اذن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 .

التأويل الهندسي: منحنى الدالة f يقبل نصف مماس ميله 1 على يمين النقطة $(0,0)$. (معادلته $\begin{cases}y=x\\x\geq0\end{cases}$)

ملاحظة: بما أن f قابلة للاشتقاق على يمين 0 فهي كذلك متصلة على اليمين في 0

ب. دراسة الفرع اللانهائي عند $+\infty$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x^2(\frac{1}{x^2}+1)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x^2+\ln(\frac{1}{x^2}+1)}{x}$

(تابع تصحيح الفرض)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2 \cdot \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = 0$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = \ln(1) = 0$

ومنه منحنى الدالة f يقبل محور الفواصل مقاربا له بجوار $+\infty$.

ج- الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ حسب العمليات على الدوال القابلة للاشتقاق و :

$$\forall x>0: \quad f'(x) = \left(\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right)' = \frac{\frac{2x}{1+x^2}\cdot x - \ln(1+x^2)}{x^2}$$

$$= \frac{g(x^2)}{x^2}$$

د- اشارة $f'(x)$ هي اشارة $g(x^2)$ لكل $x>0$.

ولدينا حسب السؤال 1) وانطلاقا من جدول تغيرات الدالة g :

$$\forall t>0: \quad g(t)>0 \iff 0<t<\alpha \; .$$

$$g(t) < 0 \iff t>\alpha$$

و

$$g(\alpha)=0$$

اذن :

$$\forall x>0: \quad f'(x)>0 \iff g(x^2)>0$$
$$\iff 0<x^2<\alpha$$
$$\iff 0<x<\sqrt{\alpha}$$

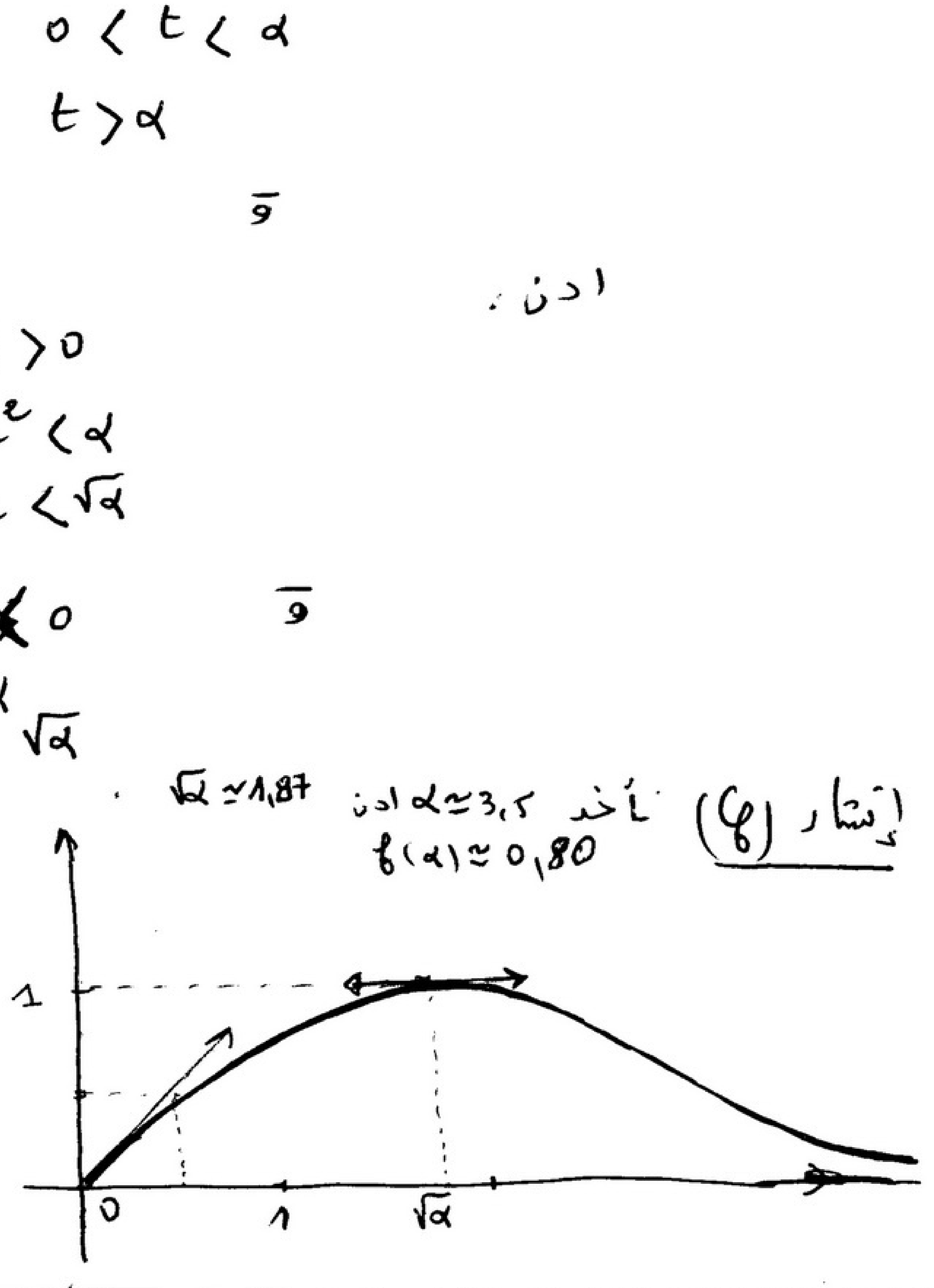
و

$$f'(x)<0 \iff g(x^2) < 0$$
$$\iff x^2>\alpha$$
$$\iff x>\sqrt{\alpha}$$

جدول تغيرات f

x	0		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{\ln(1+\alpha)}{\sqrt{\alpha}}$	$\searrow$	0

إنشاء $(\mathcal{C}_f)$ نأخذ $\alpha \simeq 3,5$ اذن $\sqrt{\alpha} \simeq 1,87$.
$f(\alpha) \simeq 0,80$



3/6

06/06/2011

(تابع تصحيح الفرض)

التمرين الثاني :

حساب P_3 : P_3 هو احتمال التوقف عن السحب في السحبة رقم 3 اي
هو احتمال الحصول على 3 كرات خضراء متوالية بعد 3 سحبات

$$P_3 = \frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5} = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$$

حساب P_4 : P_4 هو احتمال الحصول على 3 كرات خضراء بعد القيام ب 4 سحبات
اذن من الضروري ان تضم السحبة الرابعة كرة خضراء بينما الكرتان المتبقيتان توجدان في سحبتين رقميهما من 1 الى 3 : **مثلا** : $V \mid V \mid \bar{V} \mid V$

اذن :
$$P_4 = C_3^2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{72}{625}$$

حساب P_n بدلالة n $(n \geq 3)$

P_n هو احتمال الحصول على 3 كرات خضراء خلال n سحبة.
اذن السحبة الاخيرة تضم كرة خضراء. والسحبات من 1 الى $n-1$ تضم كرتين خضراوتين
ومنه ،

$$P_n = C_{n-1}^2\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n-3}$$

| | | ...... | | V |
1 2 ...... (n-1) n

التمرين الثالث :

يتكون قسم ع ع من 32 تلميذ أ

عدد الذكور : 21 من بينهم 80% منخرط في Facebook
عدد الاناث : 11 من بينهن 70% " "

1) مجموعة قيم X هي : $X(\Omega)=\{0,1,2\}$

X هو عدد الذكور الذين لم تشملهم القرعة

$(X=0)$ هو الحدث " القرعة شملت جميع الذكور "

$$P(X=0) = \frac{C_{21}^{21}\cdot C_{11}^{9}}{C_{32}^{30}} = \frac{1\cdot C_{11}^{2}}{C_{32}^{2}} = \frac{11\times 10}{32\times 31} = \frac{110}{992} = \frac{55}{496}$$

$(X=1)$ هو الحدث " القرعة لم تشمل ذكرا واحدا بالضبط " اي شملت جميع الذكور باستثناء واحد بالضبط

$$P(X=1) = \frac{C_{21}^{20}\cdot C_{11}^{10}}{C_{32}^{30}} = \frac{C_{21}^{1}\cdot C_{11}^{1}}{C_{32}^{2}} = \frac{231}{496}$$

$(X=2)$ هو الحدث " القرعة لم تشمل ذكرين "

$$P(X=2) = \frac{C_{21}^{19}\cdot C_{11}^{11}}{C_{32}^{30}} = \frac{C_{21}^{2}\cdot C_{11}^{0}}{C_{32}^{2}} = \frac{210}{496}$$

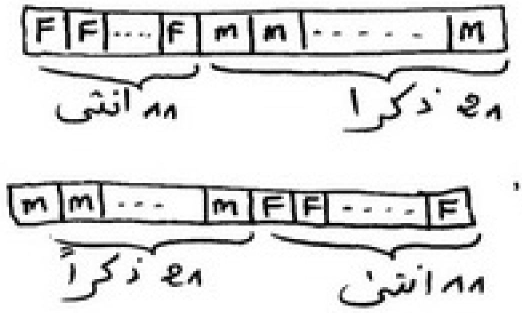
x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{55}{496}$	$\frac{231}{496}$	$\frac{210}{496}$

06/06/2011

(تابع تصحيح الغرض)

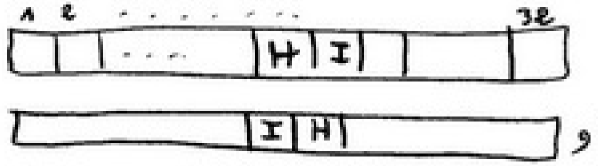
2) A "جميع الذكور يقفون جنبا إلى جنب و جميع الاناث يقفن جنبا إلى جنب"

$$P(A)=\frac{2(11!\times 21!)}{32!}$$



B "هاجر تقف بجانب ابتسام في الصف"

H = هاجر و I = ابتسام

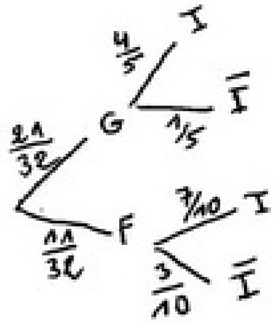


لكي يتحقق هذا الحدث يجب أن تقف هاجر وابتسام في الرتبتين:

(1 و 2) او (2 و 3) او (3 و 4) او ...... او (31 و 32)

اذن عدد الحالات التي يتحقق فيها الحدث B هي: $30!\times(2\times 31)$

$$P(B)=\frac{2\times 31\times 30!}{32!}$$



3) نعتبر الاحداث:

I: الفرد من مدمني Facebook =

G: الفرد من الذكور =

F: الفرد من الاناث =

لدينا حسب المعطيات: $P(G)=\frac{21}{32}$ و $P(F)=\frac{11}{32}$ و $P_G(I)=80\%=\frac{4}{5}$ و $P_F(I)=70\%=\frac{7}{10}$

اذن $P_G(\bar{I})=\frac{1}{5}$

أ- احتمال أن يكون ذكرا وليس من مدمني Facebook هو:

$$P(G\cap\bar{I})=P(G)\times P_G(\bar{I})=\frac{21}{32}\times\frac{1}{5}=\frac{21}{160}$$

ب- احتمال ان يكون من مدمني Facebook هو:

$$P(I)=P(G)\cdot P_G(I)+P(F)\cdot P_F(I)=\frac{21}{32}\times\frac{4}{5}+\frac{11}{32}\times\frac{7}{10}=\frac{245}{320}=\ldots$$

ملاحظة: يمكن كذلك استعمال الشجرة لحساب احتمال الحدثين السابقين.

ج- المطلوب هو: $P_I(G)$:

$$P_I(G)=\frac{P(G\cap I)}{P(I)}=\frac{P(G)\cdot P_G(I)}{P(I)}=\frac{\frac{21}{32}\times\frac{4}{5}}{\frac{245}{320}}=\frac{168}{245}=\ldots$$

06/06/2011

(تابع تصحيح الغرض)

التمرين 4 :

1) لكي نبين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي، يكفي أن نبين أنه فضاء متجهي جزئي من $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\cdot)$

لدينا : $E=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) / f : x\to(ax+b)e^{-2x} / (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

نأخذ $a=0$ و $b=0$ فإن الدالة المنعدمة $O_{\mathcal{F}}$ تنتمي لـ E.

$$O_{\mathcal{F}} : \begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto 0\end{array}$$

$$\left(\quad \forall x\in\mathbb{R} : O_{\mathcal{F}}(x)=0 \quad\right)$$

إذن $E\neq\emptyset$. ①

ليكن $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$ ولتكن $f\in E$ و $g\in E$

لنبين أن $\alpha f+\beta g\in E$.

لدينا $f\in E$ إذن يوجد $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ حيث : $\forall x\in\mathbb{R} : f(x)=(ax+b)e^{-2x}$

ولدينا $g\in E$ " " " (c,d) " : $g(x)=(cx+d)e^{-2x}$ " .

إذن :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R} : (\alpha f+\beta g)(x) &= \alpha f(x)+\beta g(x)\\ &= \alpha(ax+b)e^{-2x}+\beta(cx+d)e^{-2x}\\ &= \left[(\alpha a+\beta c)x+(\alpha b+\beta d)\right]e^{-2x}\end{aligned}$$

بوضع $a'=\alpha a+\beta c$ و $b'=\alpha b+\beta d$

لدينا $a'\in\mathbb{R}$ و $b'\in\mathbb{R}$ و الدالة $\alpha f+\beta g$ معرفة إذن بـ :

$$\forall x\in\mathbb{R} : (\alpha f+\beta g)(x)=(a'x+b')e^{-2x}$$

إذن $\alpha f+\beta g\in E$ ② ،

من ① و ② نستنتج أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي جزئي من $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\cdot)$

وبالتالي فهو فضاء متجهي حقيقي.

2) $f_1 : x\longrightarrow e^{-2x}$ و $f_2 : x\longrightarrow xe^{-2x}$

لنبين أن $B=(f_1,f_2)$ أساس لـ $(E,+,\cdot)$.

لدينا :

$$\begin{aligned}\forall f\in E,\ \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2 / \forall x\in\mathbb{R} : f(x) &= (ax+b)e^{-2x}\\ &= axe^{-2x}+be^{-2x}\\ &= af_2(x)+bf_1(x)\end{aligned}$$

إذن : $\forall f\in E : \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2 / f=bf_1+af_2$

6/6

04/06/2011

(تابع تصحيح التمرين)

اذن الاسرة $B=(f_1,f_2)$ اسرة مولدة. ①

ولدينا،

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2:\ \alpha f_1+\beta f_2=0_E \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}:\ \alpha f_1(x)+\beta f_2(x)=0$$

$$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}:\ \alpha e^{-2x}+\beta x e^{-2x}=0$$

$$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}:\ (\alpha+\beta x)e^{-2x}=0$$

$$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}:\ \alpha+\beta x=0 \qquad (e^{-2x}\neq 0)$$

$$\Rightarrow \alpha=\beta=0$$

اذن $B=(f_1,f_2)$ اسرة حرة ②

من ① و ② نستنتج أن الأسرة B حرة ومولدة لـ E اذن فهي اساس لـ $(E,+,\cdot)$

(اذن $\dim E=2$)

3) نعتبر الدالة f المعرفة ب: $\forall x\in\mathbb{R}:\ f(x)=(ax+b)e^{-2x}$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

لنحدد احداثيات f' بالنسبة للاساس B.

لدينا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و:

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ f'(x)=a e^{-2x}+(ax+b)(-2)e^{-2x}$$
$$=(a-2b)e^{-2x}+(-2a)x e^{-2x}$$
$$=(a-2b)f_1(x)+(-2a)f_2(x)$$

اذن: $f'=(a-2b)f_1+(-2a)f_2$

ومنه فان زوج احداثيتي f' بالنسبة للاساس B هو $(a-2b;-2a)$.

لتكن F الدالة الاصلية لـ f والتي تنعدم في 0.

* ورد خطأ في صياغة السؤال: السؤال هو: حدد الشرط لكي تكون: $F\in E$، وبمراعاة هذا الشرط حدد احداثيات F بالنسبة للاساس B.

لدينا،

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x (at+b)e^{-2t}\,dt$$

نستعمل مكاملة بالاجزاء،

نضع: $\begin{cases}u(t)=at+b\\ v'(t)=e^{-2t}\end{cases}$ اذن $\begin{cases}u'(t)=a\\ v(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}\end{cases}$

ومنه:

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ F(x)=\left[(at+b)\times -\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x-\int_0^x -\frac{a}{2}e^{-2t}\,dt$$
$$=-\frac{(ax+b)}{2}e^{-2x}+\frac{b}{2}+\frac{a}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x$$
$$=-\frac{a}{2}x e^{-2x}+\left(-\frac{b}{2}-\frac{a}{4}\right)e^{-2x}+\frac{1}{2}b+\frac{a}{4}=\left(-\frac{b}{2}-\frac{a}{4}\right)f_1+\left(-\frac{a}{2}\right)f_2+\frac{a+2b}{4}$$

اذن $F=\left(-\frac{b}{2}-\frac{a}{4}\right)f_1-\frac{a}{2}f_2+\frac{a+2b}{4}$ اذن $F\in E$ اذا وفقط اذا كان $a+2b=0$ اي $a=-2b$

وفي هذه الحالة فان زوج احداثيتي F هو: $(0;b)$