المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم العالي وتكوين الأطر
الأكاديمية الجهوية للتربية التكوين
جهة الغرب - الشراردة - بني احسن
النيابة الإقليمية - القنيطرة

الامتحان التجريبي الموحد دورة مايو 2010

المادة	الرياضيات	المعامل	10	
الشعبة	العلوم الرياضية أ و ب	مدة الإنجاز	4 س	

سلم التنقيط	
	تمرين 1 (6 نقط)
	p عدد صحيح طبيعي أولي يخالف 2
1,5	1) حدد الأزواج $(x;y)$ من $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ التي تحقق $x^2-y^2=p$
	2) نعتبر المعادلة (F) : $p^2x^2-y^2=p^3$ ذات المجهول $(x;y)$ من $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$
1	أ - بين أنه إذا كان الزوج $(x;y)$ حل للمعادلة (F) ، فإن $y\equiv 0[p]$
1,5	ب - حل في $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ المعادلة (F)
2	3) ليكن n عددا صحيحا نسبيا ، باستعمال مبرهنة فيرما بين أن : $(n+1)^p-n^p-1\equiv 0[2p]$
	تمرين 2 (8 نقط)
	لكل z من $\mathbb{C}$ نضع : $P(z)=z^3-(5-2i)z^2+(5-4i)z-9-2i$
1	1) أ - بين أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا يتم تحديده
1	ب - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-(5-3i)z+2-9i=0$
0,5	ج - حدد حلول المعادلة : $P(z)=0$ z من $\mathbb{C}$
	2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ ولتكن النقط A و B و C و J ذات الألحاق i و $1-2i$ و $4-i$ و 2 على التوالي
1	أ - بين أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في B
1	ب - ليكن r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$. حدد لحق النقطة D صورة B بالدوران r
1,5	ج - لتكن (Γ) مجموعة النقط التي ألحاقها تكتب على الشكل $2+\sqrt{5}e^{i\alpha}$ حيث α يتغير في $\mathbb{R}$. حدد المجموعة (Γ) وبين أن $ABCD$ مربع تنتمي رؤوسه إلى (Γ)
	3) لكل n من $\mathbb{N}$ ، نعتبر النقط M_n ذات اللحق z_n بحيث $z_0=4-i$ و $M_{n+1}=r(M_n)$
1	أ - بين أن : $\forall n\in\mathbb{N},\ M_n\in(\Gamma)$
1	ب - حدد z_{2009}

تمرين 3 (8 نقط)

الجزءالأول:

نعرف في المجموعة $G=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ قانون التركيب الداخلي T بما يلي :

$$\forall(x;y)\in G\quad;\forall(x';y')\in G\qquad (x;y)T(x';y')=\left(xx';\sqrt{x}y'+x'y\right)$$

1) بين أن (G,T) زمرة غير تبادلية 1,5

2) نعتبر المجموعة $F=\{(1;y)/\,y\in\mathbb{Z}\}$ ، بين أن (F,T) زمرة جزئية للزمرة (G,T) 1
. هل هي تبادلية ؟ علل جوابك .

الجزء الثاني :

لتكن المجموعة D بحيث :

$$D=\left\{M_{(x;y)}=\begin{pmatrix}\sqrt{x} & y\\ 0 & x\end{pmatrix}/(x;y)\in G\right\}$$

1) بين أن D جزء مستقر من $(M_2(IR);\times)$ 1

2) نعتبر التطبيق φ بحيث :

$$\varphi:G\to D$$
$$(x;y)\to M(x;y)$$

أ - بين أن φ تشاكل تقابلي من (G,T) نحو $(D;\times)$ 1

ب - استنتج بنية $(D;\times)$ وحدد مقلوب $M(x;y)$ 1

3) نضع $A=M(1;1)$ و $I=M(1;0)$ نعتبر المجموعة $E=\{aI+bA\,/\,(a;b)\in\mathbb{Z}^{\ 2}\}$ 0,5

أ - تحقق من أن : $A^2=-I+2A$

ب - بين أن $(E,+;\times)$ حلقة تبادلية و واحدية . هل هي كاملة ؟ علل جوابك 2

تمرين 4 (18نقط)

الجزء الأول

1) أ - بين أن الدالة $t\to\dfrac{1}{\ln t}$ تناقصية على كل من المجالين $]1;+\infty[$ و $]0;1[$ 1

ب - استنتج أن : $(\forall x\in\,]0;1[\cup]0;+\infty[\,):\dfrac{x^2-x}{2\ln x}\le\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}\le\frac{x^2-x}{\ln x}$ 1,5

2) نعتبر الدالة φ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases}\varphi(t)=\dfrac{t+1}{\ln t};t\in\,]0;1[\cup]1;+\infty[\\ \varphi(0)=0;\quad \varphi(1)=1\end{cases}$$

أ - بين أن : $(\forall t\in\,]0;1[\cup]1;+\infty[)\quad t-1-t\ln t<0$ 0,5

ب - أثبت أن الدالة φ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$ 1

ج - استنتج أن : $(\forall x\in\,]0;1[\cup]1;+\infty[):x-1\le\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\varphi(t)}{t}dt\le\frac{x^2-x}{2}$ 1,5

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على بما يلي :

$$\begin{cases}f(x)=-\ln(1+x)+\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t};x\in\,]0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(0)=f(1)=0\end{cases}$$

1) أ - باستعمال السؤال (1 - ب من الجزء الأول) بين أن الدالة f متصلة وقابلة للاشتقاق على اليمين في 0	1,5
ب - احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$	1
2) أ - تحقق من أن $(\forall x\in]0;1[\cup]1;+\infty[): \int_x^{x^2}\frac{\varphi(t)}{t}dt = f(x)+\ln\frac{x+1}{2}$	1
ب - بين أن الدالة f متصلة وقابلة للاشتقاق في 1	1,5
3) أ - بين أن : $(\exists\alpha\in]0;1[): f'(\alpha)=0$	0,5
ب - بين أن : $(\forall x\in]0;1[\cup]1;+\infty[): f'(x)=-\frac{1}{x+1}+\varphi(x)$	1
ج - استنتج أن f' تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$ ثم حدد تغيرات الدالة f	1
الجزء الثالث	
نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي	
$\begin{cases} g(x)=(x+1)e^{-\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}} & ;x\in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ g(0)=g(1)=1 \end{cases}$	.
1) أ تحقق أن : $(\forall x\in IR^+): g(x)=e^{-f(x)}$	0,5
ب - ضع جدول تغيرات الدالة g	1
أنشىء (C_g) منحنى الدالة g في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ (نأخذ $\alpha\approx 0,3$ و $g(\alpha)\approx 1,2$ ونقبل أن (C_g) يقبل نقطة انعطاف أفصولها x_0 بحيث $\left(\frac{3}{2}<x_0<2\right)$	1
2) أ - أثبت أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ المعادلة : $g(x)=\frac{n}{(n+1)}\frac{g(\alpha)}{\alpha}x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]\alpha;+\infty[$	1
ب - أثبت أن : لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، $x_n\le\frac{n+1}{n}\alpha$	1
ج - احسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$	0,5