Exercice5

Partie A : Propriété de l'espérance. Démonstration de cours.

1.

a)**Par définition** $\mathrm{E}(\mathrm{X})=p_1x_1+p_2x_2+\ldots..+p_nx_n=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i$

b) $a\mathrm{X}+b$ **est une variable aléatoire dont la loi est décrite par le tableau suivant :**

Valeurs possibles de $a\mathrm{X}+b$	ax_1+b	$\ldots$	$\ldots$	ax_n+b
p_i	p_1	$\ldots$	...	p_n

Donc $\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b)=p_1(ax_1+b)+p_2(ax_2+b)+\ldots+p_n(ax_n+b)$ **.**

On développe et on rassemble les termes contenant *a* et ceux contenant *b*, cela donne :

$\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b)=a(p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n)+b(p_1+p_2+...+p_n)$ **.**

Or $p_1x_1+p_2x_2+\ldots..+p_nx_n=\mathrm{E}(\mathrm{X})$ **et** $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$ **donc** $\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b)=a\mathrm{E}(\mathrm{X})+b$

2. Application

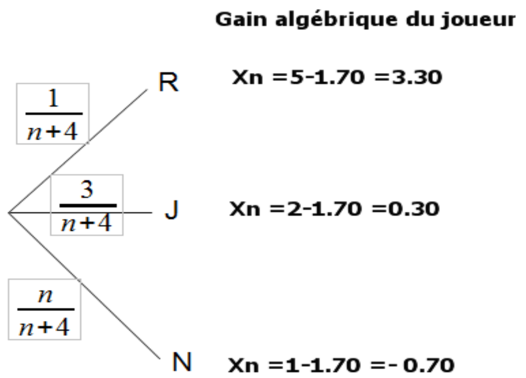
D'après l'énoncé : $\mathrm{Y}=2\mathrm{X}+1000$ **donc** $\mathrm{E}(\mathrm{Y})=\mathrm{E}(2\mathrm{X}+1000)=2\mathrm{E}(\mathrm{X})+1000=2\times500+1000=2000$

Sur un grand nombre de jours, la cantine peut espérer dépenser en moyenne 2000 euros par jour.

Partie B : Un jeu

1. Déterminer la loi de probabilité de X_n .

Faisons un arbre pour illustrer l'énoncé :



Loi de probabilité de X

n

Valeurs possibles de X_n	–0,70	0,3	3,30
$p_i=\mathrm{P}(\mathrm{X}_n=x_i)$	$\frac{n}{n+4}$	$\frac{3}{n+4}$	$\frac{1}{n+4}$

2. Calculer l'espérance mathématique de X_n en fonction de n .

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)=\frac{-0,7\times n}{n+4}+\frac{0,3\times3}{n+4}+\frac{3,30\times1}{n+4}=\frac{-0,7n+4,2}{n+4}$$

3. a. Supposons que ***n*** soit tel que $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)=0,5$. Est-ce intéressant pour le club organisateur ? Justifier

Ce n'est pas intéressant pour le club puisque cela signifie qu'il va perdre en moyenne 0,5 € par partie jouée (pour un grand nombre de parties, chaque joueur pouvant espérer gagner 0,5 € par partie)

b.Supposons que ***n*** soit tel que $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)=0$. Est-ce intéressant pour le club organisateur ? Justifier

Ce n'est pas intéressant non plus puisque, le jeu étant équitable, le club ne perdra , ni ne gagnera sur un grand nombre de parties.

c. Supposons que ***n*** soit tel que $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)=-0,5$. Est-ce intéressant pour le club organisateur ? Justifier

Ce cas est intéressant pour le club puisque cela signifie qu'il va gagner en moyenne 0,5 € par partie jouée (pour un grand nombre de parties, chaque joueur pouvant espérer perdre 0,5 € par partie)

4.

L'espérance de gain d'un joueur doit être inférieure ou égale à – 0,5 , on doit donc résoudre l'inéquation suivante : $\frac{-0,7n+4,2}{n+4}\leqslant-0,5$ **.**

Cette inéquation est équivalente à $-0,7n+4,2\leqslant-0,5(n+4)$ **(multiplication par** $n+4$ **strictement positif) d'où** $6,2\leqslant0,2n$ **c'est à dire** $n\geqslant31$ **.**

Il faut au moins 31 boules noires pour que le club espère gagner au moins 0,5 € par partie

Exercice6

1.
2. $\boxed{\text{Un employé peut composer } 3 \times 2 \times 2 = 12 \text{ repas}}$.

3. Les repas sont tous équiprobables, on utilise donc la formule $p\,(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$, le nombre de cas favorables étant lus sur l'arbre. D'où $\boxed{p\,(A) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}\,;\, p\,(B) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}}$.

   $A \cap B$ est l'évènement : « le repas contient le plat de poisson et de la quiche » donc $\boxed{p\,(A \cap B) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}}$.

   On en déduit $p\,(A \cup B) = p\,(A) + p\,(B) - p\,(A \cap B) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$. $\boxed{p\,(A \cup B) = \dfrac{2}{3}}$.
4. Voir annexe.
5. (a) $\boxed{\text{La variable aléatoire } R \text{ peut prendre les valeurs } \{1000\,;\ 1100\,;\ 1200\,;\ 1300\,;\ 1400\,;\ 1500\,;\ 1600\}}$.

   (b) La loi de probabilté de la variable aléatoire R est donné par le tableau :

$R = x_i$	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600
$p\,(R = x_i) = p_i$	$\dfrac{2}{12}$	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{2}{12}$	$\dfrac{3}{12}$	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{2}{12}$	$\dfrac{1}{12}$

   (c) Sur un grand nombre de repas, le bilan calorique moyen correspond à l'espérance $E\,(R)$.

   $E\,(R) = 1000 \times \dfrac{2}{12} + 1100 \times \dfrac{1}{12} + 1200 \times \dfrac{2}{12} + 1300 \times \dfrac{3}{12} + 1400 \times \dfrac{1}{12} + 1500 \times \dfrac{2}{12} + 1600 \times \dfrac{1}{12}$

   Soit $E\,(R) = \dfrac{15\,400}{12} = \dfrac{3850}{3} \approx 1283.33$. $\boxed{\text{Le bilan calorique moyen d'un repas est 1283.33 kcal}}$.