EXERCICE 4 NON SPECIALISTES

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par : $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. $\left|\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{9}{16} + \dfrac{3}{16}} = \sqrt{\dfrac{12}{16}} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{i}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$$

Or $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Donc le nombre complexe $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$ a pour module $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et pour argument $\dfrac{\pi}{6}$ donc sa forme exponentielle est $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

2. a. $r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n\right| = \left|\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right| \times |z_n| = \dfrac{\sqrt{3}}{2} r_n$

Donc la suite (r_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $r_0 = |z_0| = 1$.

b. La suite (r_n) est géométrique donc, pour tout n, $r_n = r_0 \times q^n$, donc $r_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

c. $OA_n = |z_n| = r_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

(r_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; or $-1 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc la suite (r_n) converge vers 0. La longueur OA_n tend donc vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3. a. On fait tourner l'algorithme donné dans le texte en prenant pour P la valeur 0,5 :

	n	R	P	$R > P$
Initialisations	0	1	0,5	Vrai
Traitement	1	0,866	0,5	Vrai
	2	0,75	0,5	Vrai
	3	0,6495	0,5	Vrai
	4	0,5625	0,5	Vrai
	5	0,487	0,5	Faux
Sortie	Afficher 5			

La valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$ est 5.

b. Cet algorithme s'arrête dès que $R \leqslant P$ et affiche alors n, c'est-à-dire qu'il affiche la plus petite valeur de n pour laquelle R donc $r_n = OA_n$ est inférieur ou égal à P.
On peut donc dire que $OA_{32} > 0,01$ et que $OA_{33} \leqslant 0,01$.
Vérification à la calculatrice : $r_{32} \approx 0,01002$ et $r_{33} \approx 0,00868$.

4. a. On considère le triangle OA_nA_{n+1}.
$OA_n = r_n$ donc $(OA_n)^2 = r_n^2$

$OA_{n+1} = r_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} r_n$ donc $(OA_{n+1})^2 = \dfrac{3}{4} r_n^2$

$$A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n - z_n\right| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i} - 1\right) z_n\right| = \left|-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right| \times |z_n|$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} \times r_n = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}}\, r_n = \sqrt{\frac{4}{16}}\, r_n = \frac{1}{2} r_n \text{ donc } (A_nA_{n+1})^2 = \frac{1}{4} r_n^2$$

$(A_nA_{n+1})^2 + (OA_{n+1})^2 = \dfrac{1}{4} r_n^2 + \dfrac{3}{4} r_n^2 = r_n^2 = (OA_n)^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

b. On admet que $z_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$.

Le point A_n, d'affixe z_n, appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si son argument est $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ modulo 2π, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$ modulo π, donc il peut s'écrire $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Le nombre z_n a pour argument $\frac{n\pi}{6}$; $\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff n = 3 + 6k$.

Mais n est un entier naturel donc k doit être strictement positif donc appartenir à $\mathbb{N}$.

Donc si n s'écrit $3 + 6k$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors le point A_n appartient à l'axe des ordonnées.

c. Le point A_6 a pour affixe z_6 qui a pour argument $\frac{6\pi}{6} = \pi$; ce point est donc sur l'axe des abscisses. Comme le triangle OA_5A_6 est rectangle en A_6, on trace le cercle de diamètre $[OA_5]$; le point A_6 est à l'intersection de ce cercle et de l'axe des abscisses.

Le point A_7 a pour affixe z_7 qui a pour argument $\frac{7\pi}{6}$; donc les points A_1, O et A_7 sont alignés.

Le point A_7 se trouve donc à l'intersection du cercle de diamètre $[OA_6]$ et de la droite (OA_1).

Etc. (Voir figure en annexe)

Remarque : les points A_3 et A_9 appartiennent à l'axe des ordonnées, ce qui correspond bien à la réponse trouvée à la question **4. b.**