Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé. On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante : $z^3 + (-8+i)z^2+(17-8i)z+17i = 0$

1. Montrer que $-i$ est solution de (E).

$(-i)^3+(-8+i)(-i)^2+(17-8i)(-i)+17i = i+8-i-17i-8+17i = 0$

Conclusion : $-i$ est bien solution de l'équation (E).

2. Déterminer les nombres réels a, b, c tels que : $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(az^2+bz+c)$.

Pour tout z de $\mathbb{C}$,

$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(az^2+bz+c)$

$\Leftrightarrow z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=az^3+(b+ia)z^2+(c+ib)z+ic$

Par identification, les réels a, b et c vérifient : $\begin{cases} a=1 \\ b+ia=-8+ia \\ c+ib=17-8i \\ 17i=ic \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-8 \\ c=17 \end{cases}$

Conclusion : **Pour tout z de $\mathbb{C}$,** $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(z^2-8z+17)$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0$

$\Leftrightarrow (z+i)(z^2-8z+17)=0$

$\Leftrightarrow z+i=0$ ou $z^2-8z+17=0$

$\Leftrightarrow$ **$z=-i$ ou $z^2-8z+17=0$**

Résolvons l'équation $z^2-8z+17=0$

$\Delta=(-8)^2-4(1)(17)=64-68=-4=(2i)^2$

Il y a 2 solutions : $z_1=\dfrac{8-2i}{2}=4-i$ et $z_2=\overline{z_1}=4+i$

Conclusion : $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0 \Leftrightarrow z=-i$ ou $z=z_1$ ou $z=z_2$

Exercice 2

ω est différent de i

1. Soit $\Omega(\omega)$ un éventuel point invariant, on aurait :

$\omega=\dfrac{\omega^2}{i-\omega} \Leftrightarrow \omega(i-\omega)=\omega^2 \Leftrightarrow (\omega=0)\,ou\,(i-\omega=\omega) \Leftrightarrow (\omega=0)$ ou $\left(\omega=\dfrac{i}{2}\right)$.

2. L'affixe du point B' image de B par f est égale à $\dfrac{z_B^2}{i-z_B}$ **c'est-à-dire** $\dfrac{4}{i-2}=\dfrac{4(-2-i)}{5}$

3. *a.*

$$z'=\frac{z^2}{i-z}\Leftrightarrow x'+iy'=\frac{\left(x+iy\right)^2}{i-\left(x+iy\right)}=\frac{x^2+2ixy-y^2}{-x+i(1-y)}=\frac{\left(x^2+2ixy-y^2\right)\left(-x-i(1-y)\right)}{x^2+(1-y)^2}$$

$$\Leftrightarrow x'+iy'=\frac{-x^3-2ix^2y+xy^2-ix^2(1-y)+2xy(1-y)+iy^2(1-y)}{x^2+(1-y)^2}$$

$$\Leftrightarrow x'+iy'=\underbrace{\frac{-x(x^2-y^2-2y+2y^2)}{x^2+(1-y)^2}}_{x'}+i\underbrace{\frac{-2x^2y-x^2(1-y)+y^2(1-y)}{x^2+(1-y)^2}}_{y'}$$

Par identification, on obtient la réponse demandée.

b. $M\in E\Leftrightarrow$ M’ est sur l'axe des imaginaires purs

$$\Leftrightarrow x'=0\Leftrightarrow\frac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2}=0\Leftrightarrow -x(x^2+y^2-2y)=0 \text{ et } (x;y)\neq(0;1).$$

$$\Leftrightarrow\left(x=0\right)\text{ ou }\left(x^2+(y-1)^2=1\right)\text{et }(x;y)\neq(0;1)$$

L'ensemble E est la réunion des points M de l'axe des ordonnées (sauf A) ainsi que les points du cercle de centre A de rayon 1.